

NO.1

- 1、28; 2、210; 3. $3n$; 4. 9
- 5、 $8\sqrt{3}+4$) π 6. 127; $3n^2+3n+1$ 7. $(2n+1)^2$.
- 8.6; 9. $\frac{2009}{2010}$; 10.625.

11、解：命题 n : 点 (n, n^2) 是直线 $y = nx$ 与双曲线 $y = \frac{n^3}{x}$ 的一个交点 (n 是正整数). ---

$$(2) \text{把} \begin{cases} x=n \\ y=n^2 \end{cases} \text{代入 } y=nx, \text{ 左边} = n^2, \text{ 右边} = n \cdot n = n^2,$$

\therefore 左边 = 右边, \therefore 点 (n, n^2) 在直线上.

同理可证: 点 (n, n^2) 在双曲线上,

\therefore 点 (n, n^2) 是直线 $y = nx$ 与双曲线 $y = \frac{n^3}{x}$ 的一个交点, 命题正确.

12. 【考点】一次函数图象上点的坐标特征.

【专题】规律型; 一次函数及其应用.

【分析】写出部分 A_n 点的坐标, 根据坐标的变化找出变化规律“ $A_{2n+1} ((-2)^n, 2(-2)^n)$ (n 为自然数)”, 依此规律即可得出结论.

【解答】解: 观察, 发现规律: $A_1 (1, 2)$, $A_2 (-2, 2)$, $A_3 (-2, -4)$, $A_4 (4, -4)$, $A_5 (4, 8)$, ...,

$\therefore A_{2n+1} ((-2)^n, 2(-2)^n)$ (n 为自然数).

$\therefore 2017 = 1008 \times 2 + 1$,

$\therefore A_{2017}$ 的坐标为 $((-2)^{1008}, 2(-2)^{1008}) = (2^{1008}, 2^{1009})$.

故答案为: $(2^{1008}, 2^{1009})$.

【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及规律型中坐标的变化, 解题的关键是找出变化规律“ $A_{2n+1} ((-2)^n, 2(-2)^n)$ (n 为自然数)”. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 写出部分 A_n 点的坐标, 根据坐标的变化找出变化规律是关键.

13、解: (1) $\triangle AGF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比是 1: 4.

(2) ①能为菱形.

由于 $FC \parallel EF'$, $CE \parallel FF'$,

∴ 四边形 $CEF'F$ 是平行四边形.

当 $CE = CF = \frac{1}{2}AC = 2$ 时, 四边形 $CEF'F$ 为菱形, 此时可求得 $x = 2$.

∴ 当 $x = 2$ 秒时, 四边形 $CEF'F$ 为

②分两种情况:

①当 $0 \leq x < 2\sqrt{2}$ 时,

如图 3 过点 G 作 $GM \perp BC$ 于 M .

∵ $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 4\sqrt{2}$, G 为 AB 中点,

∴ $GM = \sqrt{2}$.

又∵ G, F 分别为 AB, AC 的中点,

∴ $GF = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$.

方法一:

∴ $S_{\text{梯形}DEFG} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 6$

∴ 等腰梯形 $DEFG$ 的面积为 6.

∵ $GM = \sqrt{2}$, ∴ $S_{\square BDG'G} = \sqrt{2}x$

∴ 重叠部分的面积为: $y = 6 - \sqrt{2}x$.

∴ 当 $0 \leq x < 2\sqrt{2}$ 时, y 与 x 的函数关系式为 $y = 6 - \sqrt{2}x$

方法二:

∵ $FG' = 2\sqrt{2} - x$, $DC = 4\sqrt{2} - x$, $GM = \sqrt{2}$,

∴ 重叠部分的面积为:

$y = \frac{(2\sqrt{2} - x) + (4\sqrt{2} - x)}{2} \times \sqrt{2} = 6 - \sqrt{2}x$.

∴ 当 $0 \leq x < 2\sqrt{2}$ 时, y 与 x 的函数关系式为 $y = 6 - \sqrt{2}x$.

②当 $2\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$ 时,

设 FC 与 DG' 交于点 P ,

则 $\angle PDC = \angle PCD = 45^\circ$.

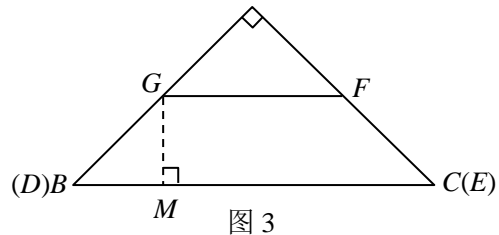


图 3

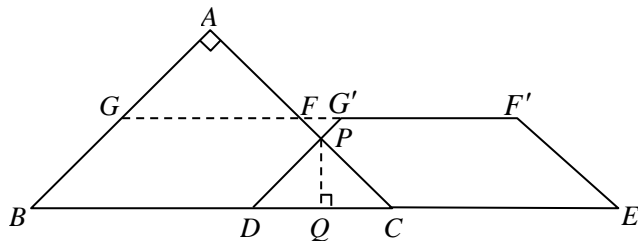


图 4

$$\therefore \angle CPD = 90^\circ, \quad PC = PD,$$

$$\text{作 } PQ \perp DC \text{ 于 } Q, \text{ 则. } PQ = DQ = QC = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - x)$$

\therefore 重叠部分的面积为:

$$y = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - x) \times \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - x) = \frac{1}{4}(4\sqrt{2} - x)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2\sqrt{2}x + 8.$$

综上, 当 $0 \leq x < 2\sqrt{2}$ 时, y 与 x 的函数关系式为 $y = 6 - \sqrt{2}x$; 当 $2\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$ 时,

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2\sqrt{2}x + 8$$

NO.2

1、考点：三角形的重心；等边三角形的性质。

解答：解：设等边三角形的中线长为 a ，

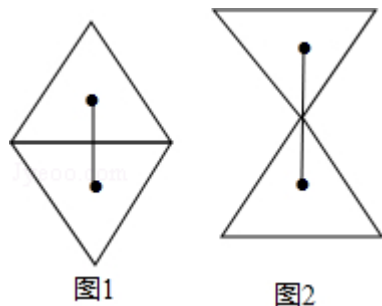
则其重心到对边的距离为： $\frac{1}{3}a$ ，

\because 它们的一边重合时（图 1），重心距为 2，

$\therefore \frac{2}{3}a=2$ ，解得 $a=3$ ，

\therefore 当它们的一对角成对顶角时（图 2）中心距 $=\frac{4}{3}a=\frac{4}{3}\times 3=4$ 。

故答案为：4.



2、解析：根据定义，“距离坐标”是 $(1, 2)$ 的点，说明 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离分别是 1 和 2，这样的点在平面被直线 l_1 和 l_2 的四个区域，各有一个点，即可求出答案。

答案：C

点评：此题考查了坐标确定位置；解题的关键是要注意两条直线相交时有四个区域。解答此类新定义类问题，关键是要理解题意，根据新定义来解决问题。

3、【解析】由题意得， $(x+1)^2 - (1-x)^2 = 8$ ，整理，得 $4x=8$ ，所以 $x=2$ 。

【答案】2

【点评】由题目中所提供的条件，把问题转化为完全平方公式及方程，通过解方程求未知数的值。

4、【解析】根据对应关系， $4d=28$ 可以求得 $d=7$ ；代入 $2c+3d=23$ 得 $c=1$ ；在代入 $2b+c=9$ 得 $b=4$ ；代入 $a+2b=14$ 得 $a=6$ 。

【答案】C.

【点评】本题的实质是考查多元方程组的解法。从简单的一元一次方程入手，通过代入消元，求出各个未知量，从而进一步理解把“未知”转化为“已知”和把复杂问题转化为简单问题的思想方法。

5、14 或 14.8

6、 $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ 的实数

7、【解析】应用：先根据准外心的概念可知，等边三角形的准外心位置应分三种不同的情况来分析：① $PB=PC$ ；② $PA=PC$ ；③ $PA=PB$ ，经过计算按来确定哪种情况符合题意，然后在符合题意的条件下求出 $\angle APB$ 的度数；探究：先根据准外心的概念可知，直角三角形的准外心位置应分三种不同的情况来分析：① $PB=PC$ ；② $PA=PC$ ；③ $PA=PB$ ，经过计算按来确定哪种情况符合题意，然后在符合题意的条件下求出 AP 的长。

【答案】应用：解：若 $PB=PC$ ，连结 PB ，则 $\angle PCB=\angle PBC$ 。

$\because CD$ 为等边三角形的高. $\therefore AD=BD$, $\angle PCB=30^\circ$,

$$\therefore \angle PBD=\angle PBC=30^\circ, \therefore PD=\frac{\sqrt{3}}{3}DB=\frac{\sqrt{3}}{6}AB.$$

与已知 $PD=\frac{1}{2}AB$ 矛盾, $\therefore PB \neq PC$.

若 $PA=PC$ ，连结 PA ，同理可得 $PA \neq PC$ 。

若 $PA=PB$ ，由 $PD=\frac{1}{2}AB$ ，得 $PD=BD$, $\therefore \angle ADB=60^\circ$ 。

故 $\angle APB=90^\circ$ 。

探究：解：若 $PB=PC$ ，设 $PA=x$ ，则

$$\therefore x=\frac{7}{8}, \text{ 即 } PA=\frac{7}{8}.$$

若 $PA=PC$ ，则 $PA=2$ 。

若 $PA=PB$ ，由图知，在 $Rt\triangle PAB$ 中，不可能，

故 $PA=2$ 或 $\frac{7}{8}$ 。

【点评】这事一道新概念试题，解答本题的关键是理解新概念的涵义，然后结合有关图形性质分情况进行计算验证。

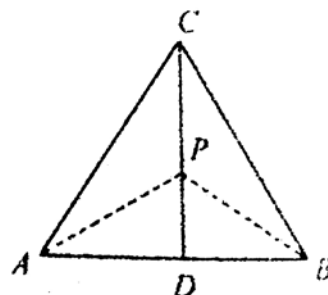
8、解：(1) B ；

(2) $0 < \sin A < 2$ ；

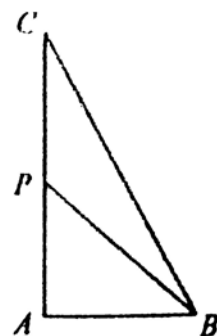
(3) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\sin A=\frac{3}{5}$ 。

在 AB 上取点 D ，使 $AD=AC$ ，

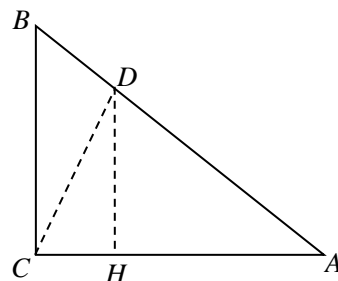
作 $DH \perp AC$ ， H 为垂足，令 $BC=3k$ ， $AB=5k$ ，



第 21 题图 1



第 21 题图 2



则 $AD=AC=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$, ----- (1 分)

又在 $\triangle ADH$ 中, $\angle AHD=90^\circ$, $\sin \angle A=\frac{3}{5}$.

$\therefore DH=AD \cdot \sin \angle A=\frac{12}{5}k$, $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{16}{5}k$.

则在 $\triangle CDH$ 中, $CH=AC-AH=\frac{4}{5}k$, $CD=\sqrt{DH^2+CH^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

于是在 $\triangle ACD$ 中, $AD=AC=4k$, $CD=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

由正对定义可得: $sad A=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{5}$, 即 $sad \alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

9、解: (1) 如图: M_1 的坐标为 $(-1, 2)$

(2) 设 $M(m+1, -1)$, $M_1(a, m-a)$

$$\begin{cases} -1=(m+1)k+b \\ m-a=ak+b \end{cases}$$

则: $k=-1$, $b=m$,

(3) 由 (2) 知, 直线 M_1M 的解析式为 $y=-x+6$

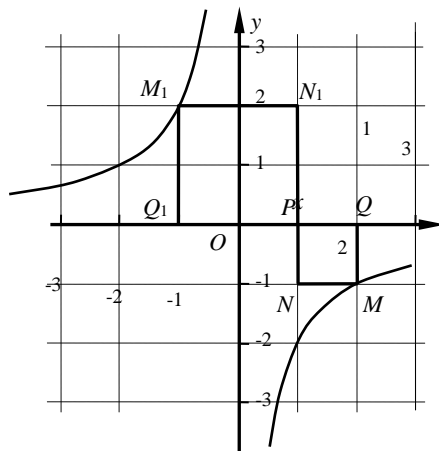
则 $M(x, y)$ 满足 $x \cdot (-x+6)=-2$

解得 $x_1=3+\sqrt{11}$, $x_2=3-\sqrt{11}$

$\therefore y_1=3-\sqrt{11}$, $y_2=3+\sqrt{11}$

$\therefore M_1, M$ 的坐标分别为 $(3-\sqrt{11}, 3+\sqrt{11})$,

$(3+\sqrt{11}, 3-\sqrt{11})$.



10、解: (1) $\because a > 0$,

$\therefore y=ax^2$ 的图象大致如下:

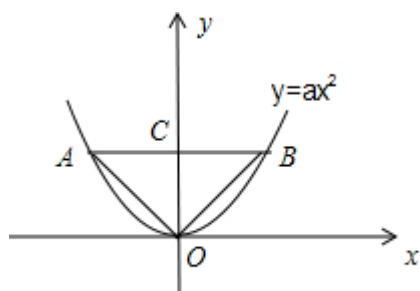


图 1

其必过原点 O , 记 AB 为其碟宽, AB 与 y 轴的交点为 C , 连接 OA, OB .

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形, $AB \parallel x$ 轴,

$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ACO$ 与 $\triangle BCO$ 亦为等腰直角三角形,

$\therefore AC = OC = BC$,

$\therefore x_A = y_A, x_B = y_B$, 代入 $y = ax^2$,

$\therefore A(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}) \quad B(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}) \quad C(0, \frac{1}{a})$,

$\therefore AB = \frac{2}{a} \quad OC = \frac{1}{a}$,

即 $y = ax^2$ 的碟宽为 $\frac{2}{a}$.

抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 对应的 $a = \frac{1}{2}$, 得碟宽 $\frac{2}{a}$ 为 4;

抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$, 碟宽为 $\frac{2}{a}$;

因此, 本题正确答案是: $\frac{1}{2}, \frac{2}{a}$;

(2) $\therefore y = a(x-1)^2 - 6a (a > 0)$

\therefore 同(1), 其碟宽为 $\frac{2}{a}$, \therefore 抛物线 $y = a(x-1)^2 - 6a (a > 0)$ 的碟宽为 6,

$$\therefore \frac{2}{a} = 6$$

$$\text{计算得出 } a = \frac{1}{3},$$

因此，本题正确答案是： $\frac{1}{3}$ ；

(3) (1) $\therefore F_1$ 的碟宽： F_2 的碟宽 $= 2:1$ ，

$$\therefore \frac{2}{a_1} = \frac{4}{a_2},$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore a_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$$

的碟宽 AB 在 x 轴上 (A 在 B 左边)，

$$\therefore A(-1, 0), B(5, 0),$$

$$\therefore F_2 \text{ 的碟顶坐标为 } (2, 0),$$

$$\therefore y_2 = \frac{2}{3}(x-2)^2.$$

(2) $\therefore F_n$ 的准碟形为等腰直角三角形，

$$\therefore F_n \text{ 的碟宽为 } 2h_n,$$

$$\therefore 2h_n : 2h_{n-1} = 1:2,$$

$$\therefore h_n = \frac{1}{2}h_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 h_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 h_{n-3} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} h_1,$$

$$\therefore h_1 = 3,$$

$$\therefore h_n = \frac{3}{2^{n-1}}.$$

$\therefore h_n \parallel h_{n-1}$ ，且都过 F_{n-1} 的碟宽中点，

$\therefore h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n$ 都在一条直线上，

$\therefore h_1$ 在直线 $x=2$ 上，

$\therefore h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n$ 都在直线 $x=2$ 上，

$\therefore F_n$ 的碟宽右端点横坐标为 $2 + \frac{3}{2^{n-1}}$ ，

另， F_1, F_2, \dots, F_n 的碟宽右端点在一条直线上，直线为 $y = -x + 5$ 。

分析如下：

考虑 F_{n-2}, F_{n-1}, F_n 情形，关系如图 2，

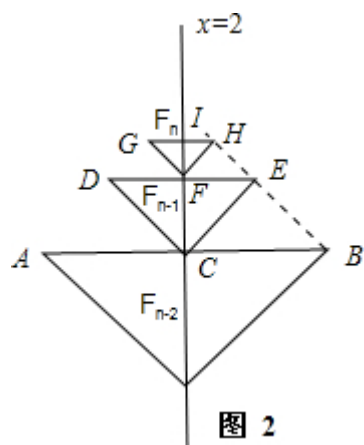


图 2

F_{n-2}, F_{n-1}, F_n 的碟宽分别为 AB, DE, GH ; C, F, I 分别为其碟宽的中点，都在直线 $x=2$ 上，连接右端点， BE, EH 。

$\therefore AB \parallel x$ 轴， $DE \parallel x$ 轴， $GH \parallel x$ 轴，

$\therefore AB \parallel DE \parallel GH$ ，

$\therefore GH$ 平行相等于 FE ， DE 平行相等于 CB ，

\therefore 四边形 $GFEH$ ，四边形 $DCBE$ 都为平行四边形，

$\therefore HE \parallel GF, EB \parallel DC$ ，

$\therefore \angle GFI = \frac{1}{2} \cdot \angle GFH = \frac{1}{2} \cdot \angle DCE = \angle DCF$ ，

$$\therefore GF \parallel DC,$$

$$\therefore HE \parallel EB,$$

$\therefore HE$, EB 都过 E 点,

$\therefore HE$, EB 在一条直线上,

$\therefore F_{n-2}$, F_{n-1} , F_n 的碟宽的右端点是在一条直线,

$\therefore F_1$, F_2 , \dots , F_n 的碟宽的右端点是在一条直线.

$$\therefore F_1: y_1 = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3 \quad \text{准碟形右端点坐标为 } (4, 1),$$

$$F_2: y_2 = \frac{3}{2}(x-2)^2 \quad \text{准碟形右端点坐标为 } (2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}),$$

\therefore 待定系数可得过两点的直线为 $y = -x + 5$,

$\therefore F_1$, F_2 , \dots , F_n 的碟宽的右端点是在直线 $y = -x + 5$ 上.

解析

(1) 根据定义易算出含具体值的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$, 利用端点(第一象限)横纵坐标的相等. 推

广至含字母的抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 求出碟宽;

(2) 根据(1)的结论, 根据碟宽 $AB = 6$ 易得 a 的值;

(3) (1) 由 y_1 , 易推 y_2 . (2) 结合画图, 易知 h_1 , h_2 , h_3 , \dots , h_{n-1} , h_n 都在直线

$x = 2$ 上, 但证明需要有一般推广, 可以考虑 $h_n \parallel h_{n-1}$, 且都过 F_{n-1} 的碟宽中点, 进而可

得. 另画图时易知碟宽有规律递减, 所以推理也可得右端点的特点. 对于 “ F_1 , F_2 , \dots ,

F_n 的碟宽右端点是否在同一条直线上?”, 如果写出所有端点规律似乎很难, 找规律更难, 所以可以考虑基础的几个图形关系, 如果相邻 3 个点构成的两条线段不共线, 则结论不成立, 反则结论成立. 求直线方程只需考虑特殊点即可.

11、解：（1）①当 $m=0$ 时， $N(0, -1)$ ， $ON=1$ ， $NH=-1-(-2)=1$ ；

当 $m=4$ 时， $y=3$ ， $N(4, 3)$ ， $ON=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ， $NH=3-(-2)=3+2=5$ ，

故答案为：1；5；

（2）猜想： $NO=NH$ ，

证明：如图 1， NH 交 x 轴与点 Q ，

$\because N$ 在 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 上，

\therefore 设 $N(m, \frac{1}{4}m^2-1)$ ， $NQ=|\frac{1}{4}m^2-1|$ ， $OQ=|m|$ ，

$\because \triangle ONQ$ 是直角三角形，

$\therefore ON=\sqrt{NQ^2+OQ^2}=\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-1)^2+m^2}=\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+1)^2}=\frac{1}{4}m^2+1$ ，

$NH=y_N-(-2)=(\frac{1}{4}m^2-1)-(-2)=\frac{1}{4}m^2+1$

$ON=NH$ 。

故答案为：=；

【应用】（1）①抛物线 y_2 的“准线” l ： $y=-3$ ；

故答案为： $y=-3$ ；

② $\frac{1}{MQ} + \frac{1}{NH} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ ；

故答案为：1；

（2）如图 3，设直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$ 与 x 轴相交于点 C 。

由题意可知直线 CF 切 $\odot O$ 于 F ，连接 OF 。

$\therefore \angle OFC = 90^\circ$ $\therefore \angle COF = 60^\circ$ 又 $\because OF=1$ ， $\therefore OC=2$ ， $\therefore C(\pm 2, 0)$ ，

\therefore “焦点” $F_1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $F_2(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。

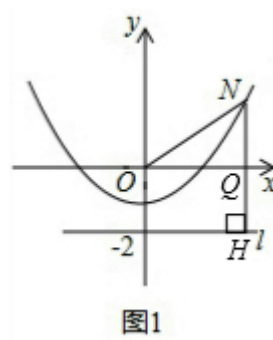


图1

∴ 抛物线 y_3 的顶点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ 或 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

当“焦点”为 $F_1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 顶点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $C(2, 0)$ 时,

得直线 CF_1 : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

过点 A 作 $AM \perp x$ 轴, 交直线 CF_1 于点 M.

∴ $MA = MF_1$,

∴ $M(-1, -\sqrt{3})$ 在抛物线 y_3 上.

设抛物线 $y_3 = a(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}$,

将 M 点坐标代入可求得: $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$;

② 当“焦点”为 $F_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 顶点为 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $C(-2, 0)$ 时,

由中心对称性可得: $y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上所述: 抛物线 $y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

点评

本题考查了二次函数综合题, 利用了勾股定理, 点到直线的距离, 线段中点的性质, 线段的和差, 抛物线的“焦点”, 抛物线的“准线”的定义, 分类思想的应用, 利用的知识点较多, 题目稍有难度.

12、解: (1) 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 上的中线, $\therefore CD = \frac{1}{2}AB$, $\therefore CD = BD$.

∴ $\angle BCE = \angle ABC$. $\because BE \perp CD$, $\therefore \angle BEC = 90^\circ$, $\therefore \angle BEC = \angle ACB$. $\therefore \triangle BCE \sim \triangle ABC$.

∴ E 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

(2) ① 作图略. 作法如下: (i) 在 $\angle ABC$ 内, 作 $\angle CBD = \angle A$; (ii) 在 $\angle ACB$ 内, 作 $\angle BCE = \angle ABC$; BD 交 CE 于点 P . 则 P 为 $\triangle ABC$ 的自相似点.

② 连接 PB 、 PC . $\because P$ 为 $\triangle ABC$ 的内心, $\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB$.

$\because P$ 为 $\triangle ABC$ 的自相似点, $\therefore \triangle BCP \sim \triangle ABC$.

$\therefore \angle PBC = \angle A$, $\angle BCP = \angle ABC = 2\angle PBC = 2\angle A$, $\angle ACB = 2\angle BCP = 4\angle A$.

$\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$. $\therefore \angle A + 2\angle A + 4\angle A = 180^\circ$.

$\therefore \angle A = \frac{180^\circ}{7}$. \therefore 该三角形三个内角的度数分别为 $\frac{180^\circ}{7}$ 、 $\frac{360^\circ}{7}$ 、 $\frac{720^\circ}{7}$.

【考点】 直角三角形斜边的一半等于斜边的一半, 等腰三角形, 相似三角形, 尺规作图, 三角形内心, 三角形内角和定理.

【分析】 (1) 由直角三角形斜边的一半等于斜边的一半知 $\triangle CDB$ 是等腰三角形, 从而得对应角 $\angle BCE = \angle ABC$. 从而由两个都是直角三角形证.

(2) ①由相似三角形两个角相等的判定, 分别作出两个角即可得到.

②由三角形内心是角平分线的交点和相似三角形对应角相等的性质推出三个角之间的关系, 再应用三角形内角和定理求解.

NO.3

1、【分析】（1）根据轴对称的性质可得 $\angle EAF = \angle DAE$ ， $AD = AF$ ，再求出 $\angle BAC = \angle DAF$ ，然后根据两边对应成比例，夹角相等两三角形相似证明；

（2）根据轴对称的性质可得 $EF = DE$ ， $AF = AD$ ，再求出 $\angle BAD = \angle CAF$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $CF = BD$ ，全等三角形对应角相等可得 $\angle ACF = \angle B$ ，然后求出 $\angle ECF = 90^\circ$ ，最后利用勾股定理证明即可；

（3）作点 D 关于 AE 的对称点 F ，连接 EF 、 CF ，根据轴对称的性质可得 $EF = DE$ ， $AF = AD$ ，再根据同角的余角相等求出 $\angle BAD = \angle CAF$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $CF = BD$ ，全等三角形对应角相等可得 $\angle ACF = \angle B$ ，然后求出 $\angle ECF = 90^\circ$ ，最后利用勾股定理证明即可。

【解答】证明：（1） \because 点 D 关于直线 AE 的对称点为 F ，

$$\therefore \angle EAF = \angle DAE, AD = AF,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 2\angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAF,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AF},$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC;$$

（2） \because 点 D 关于直线 AE 的对称点为 F ，

$$\therefore EF = DE, AF = AD,$$

$$\because \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle CAD,$$

$$\angle CAF = \angle DAE + \angle EAF - \angle CAD = 45^\circ + 45^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF,$$

$$\text{在} \triangle ABD \text{ 和 } \triangle ACF \text{ 中, } \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF \\ AD = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF \text{ (SAS),}$$

$$\therefore CF = BD, \angle ACF = \angle B,$$

$$\because AB=AC, \angle BAC=2\alpha, \alpha=45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ACB + \angle ACF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 由勾股定理得, $EF^2 = CF^2 + CE^2$,

所以, $DE^2 = BD^2 + CE^2$;

(3) $DE^2 = BD^2 + CE^2$ 还能成立.

理由如下: 作点 D 关于 AE 的对称点 F , 连接 EF 、 CF ,

由轴对称的性质得, $EF = DE$, $AF = AD$,

$$\because \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle CAD,$$

$$\angle CAF = \angle DAE + \angle EAF - \angle CAD = 45^\circ + 45^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中,
$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAF, \\ AD=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CF = BD, \angle ACF = \angle B,$$

$$\because AB=AC, \angle BAC=2\alpha, \alpha=45^\circ,$$

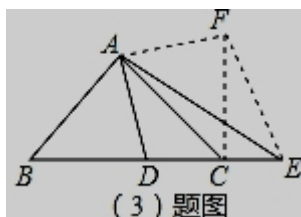
$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ACB + \angle ACF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 由勾股定理得, $EF^2 = CF^2 + CE^2$,

所以, $DE^2 = BD^2 + CE^2$.



【点评】本题是相似形综合题，主要利用了轴对称的性质，相似三角形的判定，同角的余角相等的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，此类题目，小题间的思路相同是解题的关键。

2、【考点】二次函数综合题。

【分析】（1）由对称轴的对称性得出点 A 的坐标，由待定系数法求出抛物线的解析式；

（2）作辅助线把四边形 COBP 分成梯形和直角三角形，表示出面积 S，化简后是一个关于 S 的二次函数，求最值即可；

（3）画出符合条件的 Q 点，只有一种，①利用平行相似得对应高的比和对应边的比相等列比例式；②在直角△OCQ 和直角△CQM 利用勾股定理列方程；两方程式组成方程组求解并取舍。

【解答】解：把 $C(0, 4)$ 代入解析式，且对称轴为 $x = \frac{1}{2}$ ，得：

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

解得：

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases};$$

所以抛物线的解析式为：

$$y = -2x^2 + 2x + 4$$

（2）因为点 P 在第一象限抛物线上，所以设点 P 的坐标为 $(x, -2x^2 + 2x + 4)$ 。

如图 2 所示，连接 PC，PB，PO，过点 P 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 E，过点 P 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 D。OC = 4，OB = 2，PD = x，

$$PE = -2x^2 + 2x + 4,$$

则

$$S_{\text{四边形COBP}} = S_{\triangle PCO} + S_{\triangle POB}$$

$$= \frac{1}{2}(OC \cdot PD + OB \cdot PE)$$

$$= \frac{1}{2}[4x + 2(-2x^2 + 2x + 4)]$$

$$= -2x^2 + 4x + 4 = -2(x - 1)^2 + 6,$$

当 $x = 1$ 时，四边形 COBP 的面积取得最大值，最大值为 6。

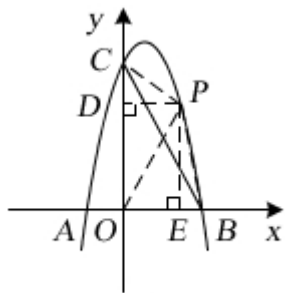


图2

(3) 存在。根据题意，要保证 $\triangle MQB$ 为直角三角形， BM 可以是直角边或斜边两种情况。

① 当 BM 为斜边时，如图 3 所示，过点 M 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 Q ，过点 M 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 F 。

点 A 与点 B 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称，所以点 A 的坐标为 $(2 \times \frac{1}{2} - 2, 0)$ ，即为 $(-1, 0)$ 。

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，将点 B 和点 C 代入解析式得 $\begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = 4 \end{cases}$ ，所以直线 BC 的解析式为 $y = -2x + 4$ 。

因为点 M 在线段 BC 上，所以设 M 的坐标为 $(m, -2m + 4)$ ($0 \leq m \leq 2$)，

则 $MQ = -2m + 4$ ， $MF = m$ ， $CF = OC - OF = 4 - (-2m + 4) = 2m$ ，

在 $Rt\triangle CFM$ 中， $CM = \sqrt{MF^2 + CF^2} = \sqrt{m^2 + (2m)^2} = \sqrt{5}m$ 。

又因为 $MQ = MC$ ，所以 $-2m + 4 = \sqrt{5}m$ ，方程两边同时平方并移项得

$$m^2 + 16m - 16 = 0,$$

解得 $m = 4\sqrt{5} - 8$ 或 $m = 4\sqrt{5} + 8$ (不符合题意，舍去)。

故点 Q 的坐标为 $(4\sqrt{5} - 8, 0)$ 。

② 当 BM 为直角边时，如图 4 所示，过点 M 作 $MG \perp x$ 轴于点 G ，作 $MQ \perp BC$ 交 x 轴于点 Q 。

因为 $QM \perp BC$ ，所以在 $Rt\triangle COB$ 和 $Rt\triangle QMB$ 中，

$$\tan \angle CBO = \frac{CO}{BO} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\text{则 } \tan \angle MBQ = \frac{MQ}{BM} = 2.$$

在 $Rt\triangle MGB$ 中,

$$BM = \sqrt{MG^2 + BG^2} = \sqrt{(-2m+4)^2 + (2-m)^2} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}m,$$

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{则 } QM = CM = BC - BM = 2\sqrt{5} - (2\sqrt{5} - \sqrt{5}m) = \sqrt{5}m.$$

$$\text{所以 } \frac{MQ}{BM} = \frac{\sqrt{5}m}{2\sqrt{5} - \sqrt{5}m} = 2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{4}{3}, \text{ 则 } BM = \frac{2}{3}\sqrt{5}, \quad QM = \frac{4}{3}\sqrt{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle QMB \text{ 中, } BQ = \sqrt{BM^2 + QM^2} = \frac{10}{3}, \text{ 则 } OQ = BQ - OB = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3},$$

所以点 Q 的坐标为 $(-\frac{4}{3}, 0)$ 。综上所述, 符合条件的 Q 点的坐标有 $(4\sqrt{5} - 8, 0)$ 和 $(-\frac{4}{3}, 0)$ 。

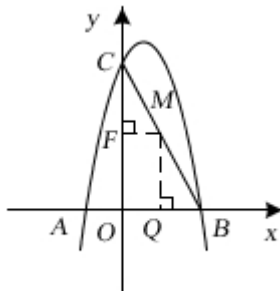


图3

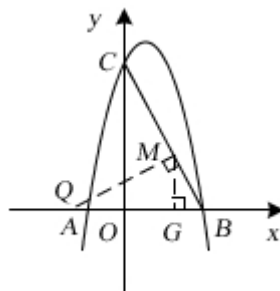


图4

解析

本题主要考查二次函数的解析式、二次函数的应用以及三角函数。

(1) 将 B, C 两点坐标代入抛物线的一般式, 利用对称轴, 列出方程组解出抛物线解析式的系数。

(2) 将四边形分割成两个三角形, 设点 P 的坐标为 $(x, -2x^2 + 2x + 4)$, 用 x 表示出四边形的面积, 再求出二次函数最大值即可。

(3) 分为 BM 是直角边或斜边两种情况, 设 M 的坐标为 $(m, -2m + 4)$, 根据等腰三角形的两腰长相等, 列出方程解得 m 的值, 再根据 M 的坐标求出点 Q 的坐标。

考点

二次函数的解析式, 二次函数的应用, 三角函数。

3、解:(1) $\because \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 5$, $\therefore AB = 10$

$$AD = x, \quad BD = 10 - x,$$

$$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{x^2 - 20x + 109}$$

(其中 $0 \leq x \leq 7$)

(2) 当 $BE \parallel AC$ 时, 则 $\angle EBD = \angle A = 30^\circ$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sqrt{3}(10-x) = 9, \quad \therefore x = 10 - 3\sqrt{3}$$

(3) 当 $\angle EBF = 22.5^\circ$, $\because \angle EFD = 45^\circ$, $\therefore EF = BF$,

$$3\sqrt{2} = 10 - x - 3, \quad \therefore x = 7 - 3\sqrt{2}$$

$$(4) AD = x, \quad BE = \sqrt{x^2 - 20x + 109}, \quad BC = 5$$

当 AD 为斜边时, $AD^2 = BE^2 + BC^2$, $x^2 = x^2 - 20x + 109 + 25$ 解得 $x = 6.7$

当 BE 为斜边时, $BE^2 = AD^2 + BC^2$, $x^2 - 20x + 109 = x^2 + 25$ 解得 $x = 4.2$

当 BC 为斜边时, $BC^2 = BE^2 + AD^2$, $25 = x^2 + x^2 - 20x + 109$ 无实数解

综上所述, 当 $AD = 6.7$ 或 4.2 时, 以线段 AD 、 EB 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形。

NO.4

1、解: (1) 100; (2) $(60 + 10t)$;

(3) 作 $OH \perp PQ$ 于点 H , 可算得 $OH = 100\sqrt{2} \approx 141$ (千米), 设经过 t 小时, 台风中心从 P 移动到 H , 则 $PH = 20t = 100\sqrt{2}$, 算得 $t = 5\sqrt{2}$ (小时), 此时, 受台风侵袭地区的圆的半径为: $60 + 10 \times 5\sqrt{2} \approx 130.5$ (千米) < 141 (千米)

\therefore 城市 O 不会受到侵袭。

点拨: 对于此类问题常常要构造直角三角形. 利用三角函数知识来解决, 也可借助于方程.

2、解：（1）设购买甲种机器 x 台，则购买乙种机器 $(6-x)$ 台。

由题意，得 $7x + 5(6-x) \leq 34$ ，

解这个不等式，得 $x \leq 2$ ，即 x 可以取 0、1、2 三个值，

所以，该公司按要求可以有以下三种购买方案：

方案一：不购买甲种机器，购买乙种机器 6 台；

方案二：购买甲种机器 1 台，购买乙种机器 5 台；

方案三：购买甲种机器 2 台，购买乙种机器 4 台；

（2）按方案一购买机器，所耗资金为 30 万元，新购买机器日生产量为 360 个；按方案二购买机器，所耗资金为 $1 \times 7 + 5 \times 5 = 32$ 万元；，新购买机器日生产量为 $1 \times 100 + 5 \times 60 = 400$ 个；按方案三购买机器，所耗资金为 $2 \times 7 + 4 \times 5 = 34$ 万元；新购买机器日生产量为 $2 \times 100 + 4 \times 60 = 440$ 个。因此，选择方案二既能达到生产能力不低于 380 个的要求，又比方案三节约 2 万元资金，故应选择方案二。

3、【分析】（1）利用待定系数法求解析式，列出方程组解答即可；

（2）根据所需费用为 $W = A$ 种树苗的费用 + B 种树苗的费用，即可解答。

【解答】解：（1）设 y 与 x 的函数关系式为： $y = kx + b$ ，

把 $(20, 160)$ ， $(40, 288)$ 代入 $y = kx + b$ 得：

$$\begin{cases} 20k + b = 160 \\ 40k + b = 288 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = 6.4 \\ b = 32 \end{cases}$$

$$\therefore y = 6.4x + 32.$$

（2） $\because B$ 种苗的数量不超过 35 棵，但不少于 A 种苗的数量，

$$\therefore \begin{cases} x \leq 35 \\ x \geq 45 - x \end{cases}$$

$$\therefore 22.5 \leq x \leq 35,$$

设总费用为 W 元，则 $W = 6.4x + 32 + 7(45 - x) = -0.6x + 347$ ，

$$\because k = -0.6,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

\therefore 当 $x = 35$ 时， W 总费用最低， $W_{\text{最低}} = -0.6 \times 35 + 347 = 137$ （元）。

【点评】此题主要考查了一次函数的应用，根据一次函数的增减性得出费用最省方案是解决问题的关键。

4、【考点】二元一次方程组的应用。

【分析】（1）设一只 A 型节能灯的售价是 x 元，一只 B 型节能灯的售价是 y 元，根据：“1 只 A 型节能灯和 3 只 B 型节能灯共需 26 元；3 只 A 型节能灯和 2 只 B 型节能灯共需 29 元”列方程组求解即可；

（2）首先根据“A 型节能灯的数量不多于 B 型节能灯数量的 3 倍”确定自变量的取值范围，然后得到有关总费用和 A 型灯的只数之间的关系得到函数解析式，确定函数的最值即可。

【解答】解：（1）设一只 A 型节能灯的售价是 x 元，一只 B 型节能灯的售价是 y 元，

根据题意，得：
$$\begin{cases} x+3y=26 \\ 3x+2y=29 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$$

答：一只 A 型节能灯的售价是 5 元，一只 B 型节能灯的售价是 7 元；

（2）设购进 A 型节能灯 m 只，总费用为 W 元，

根据题意，得： $W=5m+7(50-m)=-2m+350$ ，

$\because -2 < 0$ ，

$\therefore W$ 随 x 的增大而减小，

又 $\because m \leq 3(50-m)$ ，解得： $m \leq 37.5$ ，

而 m 为正整数，

\therefore 当 $m=37$ 时， $W_{\text{最小}} = -2 \times 37 + 350 = 276$ ，

此时 $50 - 37 = 13$ ，

答：当购买 A 型灯 37 只，B 型灯 13 只时，最省钱。

【点评】此题主要考查了二元一次方程组的应用以及一次函数的应用等知识，根据题意得出正确的等量关系是解题关键。

5、解：（1）140 57500；

$$(2) w_{\text{内}} = x(y-20) - 62500 = -\frac{1}{100}x^2 + 130x - 62500,$$

$$w_{\text{外}} = -\frac{1}{100}x^2 + (150-a)x.$$

$$(3) \text{ 当 } x = -\frac{130}{2 \times (-\frac{1}{100})} = 6500 \text{ 时, } w_{\text{内}} \text{ 最大; 分}$$

$$\text{由题意得 } \frac{0 - (150 - a)^2}{4 \times (-\frac{1}{100})} = \frac{4 \times (-\frac{1}{100}) \times (-62500) - 130^2}{4 \times (-\frac{1}{100})},$$

解得 $a_1 = 30$, $a_2 = 270$ (不合题意, 舍去). 所以 $a = 30$.

(4) 当 $x = 5000$ 时, $w_{\text{内}} = 337500$, $w_{\text{外}} = -5000a + 500000$.

若 $w_{\text{内}} < w_{\text{外}}$, 则 $a < 32.5$;

若 $w_{\text{内}} = w_{\text{外}}$, 则 $a = 32.5$;

若 $w_{\text{内}} > w_{\text{外}}$, 则 $a > 32.5$.

所以, 当 $10 \leq a < 32.5$ 时, 选择在国外销售;

当 $a = 32.5$ 时, 在国外和国内销售都一样;

当 $32.5 < a \leq 40$ 时, 选择在国内销售.

解: (1) x, D 点;

(2) ①当 $0 < x \leq 2$ 时, $\triangle EFG$ 在梯形 ABCD 内部, 所以 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$;

②分两种情况:

I. 当 $2 < x < 3$ 时, 如图 1, 点 E、点 F 在线段 BC 上,

$\triangle EFG$ 与梯形 ABCD 重叠部分为四边形 EFGM,

$\because \angle FNC = \angle FCN = 30^\circ$, $\therefore FN = FC = 6 - 2x$. $\therefore GN = 3x - 6$.

由于在 $\text{Rt}\triangle NMG$ 中, $\angle G = 60^\circ$,

$$\text{所以, 此时 } y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}(3x - 6)^2 = -\frac{7\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x - \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

II. 当 $3 \leq x \leq 6$ 时, 如图 2, 点 E 在线段 BC 上, 点 F 在射线 CH 上,

$\triangle EFG$ 与梯形 ABCD 重叠部分为 $\triangle ECP$,

$\because EC = 6 - x$,

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{8}(6 - x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 当 $0 < x \leq 2$ 时, $\because y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ 在 $x > 0$ 时, y 随 x 增大而增大,

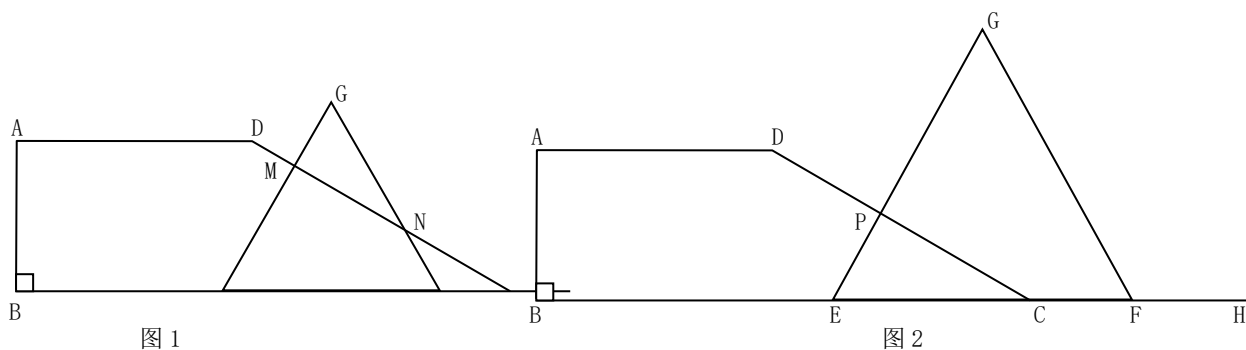
$\therefore x = 2$ 时, $y_{\text{最大}} = \sqrt{3}$;

当 $2 < x < 3$ 时, $\because y = -\frac{7\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 在 $x = \frac{18}{7}$ 时, $y_{\text{最大}} = \frac{9\sqrt{3}}{7}$;

当 $3 \leq x \leq 6$ 时, $\because y = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 在 $x < 6$ 时, y 随 x 增大而减小,

$$\therefore x=3 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

综上所述：当 $x = \frac{18}{7}$ 时， $y_{\text{最大}} = \frac{9\sqrt{3}}{7}$ 。



NO.5

1. $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$;
2. 30° 或 150°
3. $4 \pm \sqrt{7}$;
4. 4、5;
5. 65° 或 115° ;
6. 0 或 -4
7. $\frac{2\sqrt{3} \pm 3}{3}R$;
8. 15° 或 75° ;
9. $5\sqrt{73}, 15$;
10. $1 < r < 8$ 或 $18 < r < 25$
11. $\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a$
12. 60° 或 120°
13. $2\sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2\sqrt{21}}{3}$

14. 解：二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图像经过点 A $(-1, 0)$,

$$\therefore 0 = -1 - b + 3, \therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{所求二次函数的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3,$$

这个二次函数图像得顶点 B 的坐标为 $(1, 4)$.

(2) 过点 B 作 $BF \perp x$ 轴, 垂足为点 F (如图一).

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $\because BF = 4, CF = 3, BC = 5,$

$$\therefore \sin \angle BCF = \frac{4}{5}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $\because \sin \angle ACE = \frac{AE}{AC}, AC = 5,$

$$\therefore \frac{AE}{5} = \frac{4}{5}, \therefore AE = 4. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

过点 D 作 $DH \perp x$ 轴, 垂足为点 H. 由题意知, 点 H 在点 A 得右侧 (如图二),

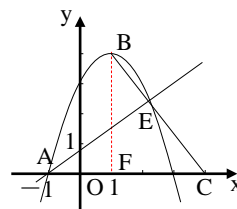
$$\text{易证 } \triangle ADH \sim \triangle ACE, \therefore \frac{AH}{AE} = \frac{DH}{CE} = \frac{AD}{AC}.$$

其中 $CE = 3, AE = 4$. 设点 D 的坐标为 (x, y) , 则 $AH = x + 1, DH = y$.

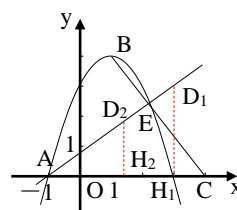
①若点 D 在 AE 的延长线上, 则 $AD = 5$, 得 $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{5}{5}, \therefore x = 3, y = 3, \therefore$ 点 D 的坐标为 $(3, 3)$;

②若点 D 在线段 AE 上, 则 $AD = 3$, 得 $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{3}{5}, \therefore x = \frac{7}{5}, y = \frac{9}{5}, \therefore$ 点 D 的坐标为 $(\frac{7}{5}, \frac{9}{5})$,

综上所述, 点 D 的坐标为 $(3, 3)$ 或 $(\frac{7}{5}, \frac{9}{5})$.



(图一)



(图二)

15. 解 (1) 由折叠可知: $\angle AFE = \angle D = 90^\circ$

$$\therefore \angle AFB + \angle EFC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFB + \angle BAF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EFC$$

$$(2) \because \tan \angle EFC = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{3}{4}$$

设 $CE = 3t$, 则 $FC = 4t$

$$\therefore EF = 5t$$

由折叠可知: $EF = DE = 5t$

$$\therefore CD = AB = 8t$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EFC, \angle ABF = \angle FCE = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle FCE$$

$$\therefore \frac{AB}{FC} = \frac{BF}{CE}$$

$$\therefore BF = 6t$$

$$\therefore AF = 10t$$

在 $Rt\triangle AFE$ 中

$$(10t)^2 + (5t)^2 = (5\sqrt{5})^2$$

$$\therefore t = 1$$

$$\therefore AB = 8$$

(3) 由矩形 $ABCD$ 可得 $EC \parallel AB$

$$\therefore \frac{EC}{AB} = \frac{GC}{GB}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{GC}{GC + 10}$$

$$\therefore GC = 6$$

当 $\triangle PAQ \sim \triangle GFQ$ 时, $\angle APQ = \angle FGQ$

$\angle PBF = \angle GCE = 90^\circ$, 可以得出: $\triangle PBF \sim \triangle GCE$

$$\therefore \frac{EC}{BF} = \frac{GC}{BP}, \therefore \frac{3}{6} = \frac{6}{BP}$$

$$\therefore BP = 12$$

\therefore 当点 P 在 AB 的延长线上时, $AP = 20$;

当点 P 在 BA 的延长线上时, $AP = 4$.

16. 证明: (1) \because 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, $\therefore \angle B = \angle C$

$$BE = 2, BP = 2, CP = 4, CD = 4, \therefore \frac{EB}{CP} = \frac{BP}{CD}, \therefore \triangle BEP \sim \triangle CPD$$

$$(2) \textcircled{1} \because \angle EPF = \angle B + \angle BEP = \angle EPF + \angle FPC$$

$$\text{又 } \angle EPF = \angle C = \angle B, \therefore \angle BEP = \angle FPC$$

$$\therefore \triangle BEP \sim \triangle CPF, \therefore \frac{EB}{CP} = \frac{BP}{CF}$$

$$\therefore \frac{2}{6-x} = \frac{x}{y+4}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \quad (2 < x < 4)$$

$\textcircled{2}$ 当点 F 在线段 CD 的延长线上时

$$\because \angle FDM = \angle C = \angle B, \angle BEP = \angle FPC = \angle FMD, \therefore \triangle BEP \sim \triangle DMF \dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because S_{\triangle DMF} = \frac{9}{4} S_{\triangle BEP}, \therefore \frac{DF}{BP} = \frac{3}{2} = \frac{y}{x}$$

$$\text{又 } y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4, \therefore x^2 - 3x + 8 = 0, \Delta < 0, \therefore \text{此方程无实数根,}$$

故当点 F 在线段 CD 的延长线上时，不存在点 P 使 $S_{\triangle DMF} = \frac{9}{4} S_{\triangle BEP}$.

当点 F 在线段 CD 上时，同理 $\triangle BEP \sim \triangle DMF$

$$\therefore S_{\triangle DMF} = \frac{9}{4} S_{\triangle BEP}, \therefore \frac{DF}{BP} = \frac{3}{2} = \frac{y}{x}, \text{ 又 } \therefore \triangle BEP \sim \triangle CPF$$

$$\therefore \frac{EB}{CP} = \frac{BP}{CF}, \therefore \frac{2}{6-x} = \frac{x}{4-y}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x^2 - 3x + 4, \therefore x^2 - 9x + 8 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = 8$$

由于 $x_2 = 8$ 不合题意舍去， $\therefore x = 1$ ，即 $BP = 1$

所以当 $S_{\triangle DMF} = \frac{9}{4} S_{\triangle BEP}$ 时， BP 的长为 1.

NO.6

一、选择题

1. A

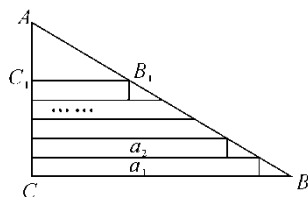
2. B

解析 因为底面周长为 6π ，设底面半径为 r ，所以 $2\pi r = 6\pi$ ， $r = 3$ ，又 $h = 4$ ，所以 $l = 5$ ， $S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l = 15\pi$ ，应选 B.

3. C

解析 如图，在 $\triangle ABC$ 中，可求得 $BC = 40$ ，设 $B_1C_1 \parallel BC$ ，得 $B_1C_1 = 5$ ，由

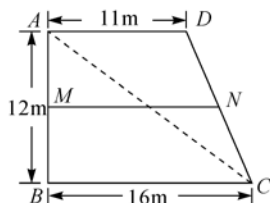
$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$, 于是 $\frac{5}{40} = \frac{AC_1}{30}$, $\therefore AC_1 = 3.75$, $\therefore CC_1 = 26.25 \approx 26$.



4. D

解析 由图①, 可知圆锥侧面展开图圆心角为 90° , 则 $\frac{r}{R} \times 360 = 90$, $R = 4r$.

5. B

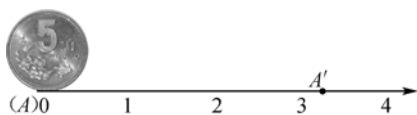


解析 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$; 过 D 画 $DE \perp BC$ 于 E , 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $CD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, 所以 $NC = 6.5$, 又 $MN = \frac{1}{2} \times (11 + 16) = 13.5$, 所以 $AM + MN + NC = 6 + 6.5 + 13.5 = 26$, 与 AC 相差 6 米.

二、填空题

6. π

解析 由题意, 可知线段 AA' 长等于圆的周长 $\pi \times 1 = \pi$.

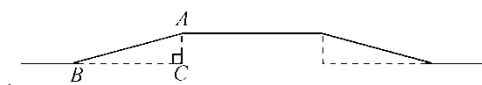


7. 270

解析 过 B 画 $BG \parallel CD$, 则 $\angle BCD + \angle CBG = 180^\circ$, 又 $CD \parallel AE$, 所以 $BG \parallel AE$. $\angle ABF + \angle BAE = 180^\circ$, 可知 $\angle BAE = 90^\circ$, 所以 $\angle ABF = 90^\circ$, $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$.

8. 11.2

解析 过 A 作 $\angle BAD = \angle B = 15^\circ$, 交 BC 于 D , 则 $BD = AD$, $\angle ADC = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 由 $\angle ADC = 30^\circ$, 得 $AD = 2AC = 2 \times 3 = 6$, 所以 $DC = \sqrt{3}AC = 3\sqrt{3}$, 故 $BC = BD + DC = 6 + 3\sqrt{3} \approx 11.2$.



$$\therefore O_1F = O_1J = O_2G = O_2I = \frac{1}{2}AB = 15,$$

$$\therefore O_1E = O_2H = 15,$$

$$\therefore O_1O_2 = EH - O_1E - O_2H = 60 - 15 - 15 = 30,$$

\therefore 两个等圆的半径为 15, 由于圆 O_1 、圆 O_2 相切, 所以左右不能够留 0.5 米的平直路面.

\therefore 设计不可行.

13. 解 解法一:

如图, 连接 OB , 过点 O 作 $OG \perp BC$ 于点 G .

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $AB=5$, $AO=\frac{AF}{2}=17$,

$$\therefore \tan \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{17}{5} = 3.4,$$

$$\therefore \angle ABO = 73.6^\circ,$$

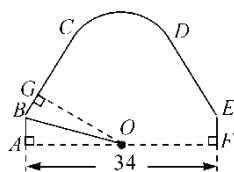
$$\therefore \angle GBO = \angle ABC - \angle ABO = 149^\circ - 73.6^\circ = 75.4^\circ.$$

$$\text{又 } \because OB = \sqrt{5^2 + 17^2} = \sqrt{314} \approx 17.72,$$

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle OBG$ 中,

$$OG = OB \cdot \sin \angle OBG = 17.72 \times 0.97 \approx 17.19 > 17.$$

\therefore 水桶提手合格.



解法二:

如图, 连接 OB , 过点 O 作 $OG \perp BC$ 于点 G .

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $AB=5$, $AO=17$,

$$\therefore \tan \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{17}{5} = 3.4,$$

$$\therefore \angle ABO = 73.6^\circ.$$

要使 $OG \geq OA$, 只需 $\angle OBC \geq \angle ABO$,

$$\therefore \angle OBC = \angle ABC - \angle ABO = 149^\circ - 73.6^\circ = 75.4^\circ > 73.6^\circ,$$

\therefore 水桶提手合格.

NO.7

1、解：（1）当 M 、 N 都在 O 右侧时， $\frac{OM}{OA} = \frac{2-4t}{2} = 1-2t$ ， $\frac{ON}{OB} = \frac{6-4t}{6} = 1-\frac{2}{3}t$ ，

所以 $\frac{OM}{OA} \neq \frac{ON}{OB}$ ．因此 MN 与 AB 不平行．

（2）①如图 2，当 M 、 N 都在 O 右侧时， $\angle OMN > \angle B$ ，不可能 $\triangle OMN \sim \triangle OBA$ ．

②如图 3，当 M 在 O 左侧、 N 在 O 右侧时， $\angle MON > \angle BOA$ ，不可能 $\triangle OMN \sim \triangle OBA$ ．

③如图 4，当 M 、 N 都在 O 左侧时，如果 $\triangle OMN \sim \triangle OBA$ ，那么 $\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OB}$ ．

所以 $\frac{4t-6}{4t-2} = \frac{2}{6}$. 解得 $t=2$.

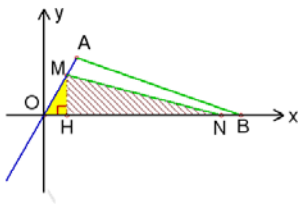


图 2

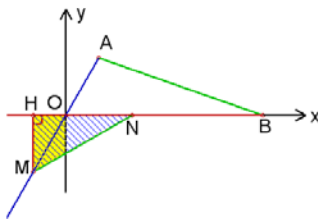


图 3

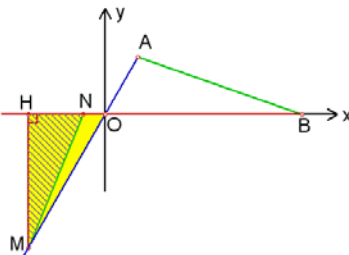


图 4

(3) ①如图 2, $OM = 2 - 4t$, $OH = 1 - 2t$, $MH = \sqrt{3}(1 - 2t)$.

$$NH = ON - OH = (6 - 4t) - (1 - 2t) = 5 - 2t.$$

②如图 3, $OM = 4t - 2$, $OH = 2t - 1$, $MH = \sqrt{3}(2t - 1)$.

$$NH = ON + OH = (6 - 4t) + (2t - 1) = 5 - 2t.$$

③如图 4, $OM = 4t - 2$, $OH = 2t - 1$, $MH = \sqrt{3}(2t - 1)$.

$$NH = OH - ON = (2t - 1) - (4t - 6) = 5 - 2t.$$

综合①、②、③, $s = MN^2 = MH^2 + NH^2$

$$= [\sqrt{3}(2t - 1)]^2 + (5 - 2t)^2 = 16t^2 - 32t + 28 = 16(t - 1)^2 + 12.$$

所以当 $t=1$ 时, 甲、乙两人的最小距离为 12 千米.

答: 甲、乙两人的最小距离为 12 千米.

解析: 此题是图形在运动中直线的平行问题, 相似三角形的对应边成比例、二次函数极值问题. **解题方法:** 正确画图、数形结合思想.

2、[解] (1) 根据两点之间距离公式, 设 $M(a, \frac{3}{2}a)$, 由 $|MO| = |MA|$, 解得: $a=1$, 则 $M(1, \frac{3}{2})$,

$$\text{即 } AM = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

(2) $\because A(0, 3)$, $\therefore c=3$, 将点 M 代入 $y=x^2+bx+3$, 解得: $b=-\frac{5}{2}$, 即: $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$.

(3) $C(2, 2)$ (根据以 AC 、 BD 为对角线的菱形). 注意: A 、 B 、 C 、 D 是按顺序的.

[解] 设 $B(0, m)$ ($m < 3$), $C(n, n^2 - \frac{5}{2}n + 3)$, $D(n, \frac{3}{4}n + 3)$,

$$|AB| = 3 - m, \quad |DC| = y_D - y_C = \frac{3}{4}n + 3 - (n^2 - \frac{5}{2}n + 3) = \frac{13}{4}n - n^2,$$

$$|AD| = \sqrt{(n-0)^2 - (\frac{3}{4}n + 3 - 3)^2} = \frac{5}{4}n,$$

$$|AB| = |DC| \Rightarrow 3 - m = \frac{13}{4}n - n^2 \dots \textcircled{1}, \quad |AB| = |AD| \Rightarrow 3 - m = \frac{5}{4}n \dots \textcircled{2}.$$

解①, ②, 得 $n_1=0$ (舍去), 或者 $n_2=2$, 将 $n=2$ 代入 $C(n, n^2 - \frac{5}{2}n + 3)$, 得 $C(2, 2)$ 。

3、解：(1) 因为反比例函数的图像过点 $A(1, k)$, 所以反比例函数

的解析式是 $y = \frac{k}{x}$ 。

当 $k = -2$ 时, 反比例函数的解析式是 $y = -\frac{2}{x}$ 。

(2) 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中, 如果 y 随 x 增大而增大, 那么 $k < 0$ 。

当 $k < 0$ 时, 抛物线的开口向下, 在对称轴左侧, y 随 x 增大而增大。

抛物线 $y = k(x^2 + x + 1) = k(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}k$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$ 。(如图 1)

所以当 $k < 0$ 且 $x < -\frac{1}{2}$ 时, 反比例函数与二次函数都是 y 随 x 增大而增大。

(3) 抛物线的顶点 Q 的坐标是 $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}k)$, A 、 B 关于原点 O 中心对称,

当 $OQ = OA = OB$ 时, $\triangle ABQ$ 是以 AB 为直径的直角三角形。

由 $OQ^2 = OA^2$, 得 $(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{5}{4}k)^2 = 1^2 + k^2$ 。

解得 $k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (如图 2), $k_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (如图 3)。

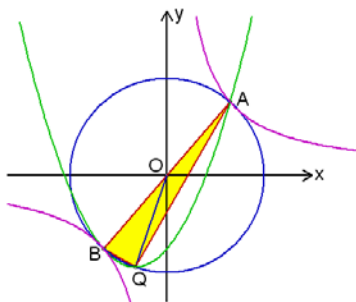


图 2

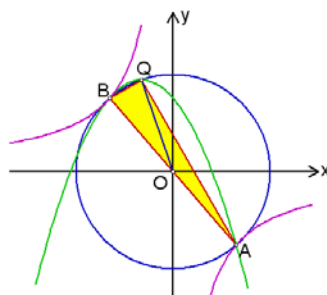


图 3

解析：1. 由点 $A(1, k)$ 或点 $B(-1, -k)$ 的坐标可以知道, 反比例函数的解析式就是 $y = \frac{k}{x}$ 。题目中的 k 都是一致的。

2. 由点 $A(1, k)$ 或点 $B(-1, -k)$ 的坐标还可以知道, A 、 B 关于原点 O 对称, 以 AB 为直径的圆的圆心就是 O 。

3. 根据直径所对的圆周角是直角, 当 Q 落在 $\odot O$ 上是, $\triangle ABQ$ 是以 AB 为直径的直角三角形。

4. 对本题的拓展训练:

如图 4, 已知经过原点 O 的两条直线 AB 与 CD 分别与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 交于 A 、 B 和 C 、 D , 那么 AB 与 CD 互相平分, 所以四边形 $ACBD$ 是平行四边形。问平行四边形 $ABCD$

能否成为矩形？能否成为正方形？

如图 5，当 A 、 C 关于直线 $y=x$ 对称时， AB 与 CD 互相平分且相等，四边形 $ABCD$ 是矩形。因为 A 、 C 可以无限接近坐标系但是不能落在坐标轴上，所以 OA 与 OC 无法垂直，因此四边形 $ABCD$ 不能成为正方形。

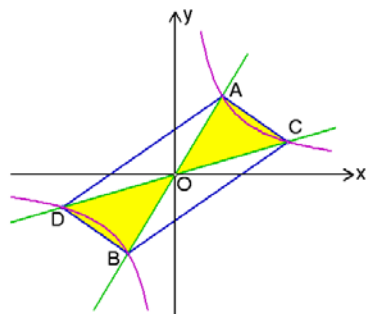


图 4

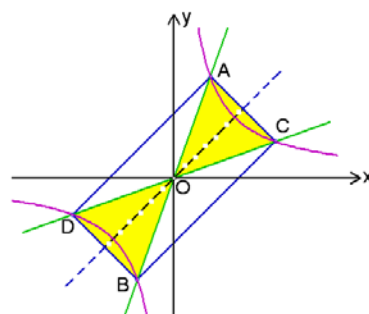


图 5

4、解：（1） \because 抛物线 $y = a(x-1)^2 + 3\sqrt{3} (a \neq 0)$ 经过点 $A(-2,0)$ ，

$$\therefore 0 = 9a + 3\sqrt{3} \therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

（2） $\because D$ 为抛物线的顶点 $\therefore D(1, 3\sqrt{3})$ 过 D 作 $DN \perp OB$ 于 N ，则 $DN = 3\sqrt{3}$ ，

$$AN = 3, \therefore AD = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \therefore \angle DAO = 60^\circ$$

$\because OM \parallel AD$

① 当 $AD = OP$ 时，四边形 $DAOP$ 是平行四边形

$$\therefore OP = 6 \therefore t = 6(s)$$

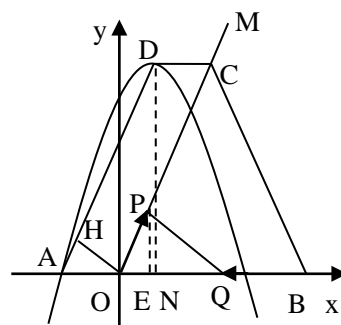
② 当 $DP \perp OM$ 时，四边形 $DAOP$ 是直角梯形

过 O 作 $OH \perp AD$ 于 H ， $AO = 2$ ，则 $AH = 1$

（如果没求出 $\angle DAO = 60^\circ$ 可由 $\text{Rt}\triangle OHA \sim \text{Rt}\triangle DNA$ 求 $AH = 1$ ）

$$\therefore OP = DH = 5 \quad t = 5(s)$$

③ 当 $PD = OA$ 时，四边形 $DAOP$ 是等腰梯形



$$\therefore OP = AD - 2AH = 6 - 2 = 4 \quad \therefore t = 4(\text{s})$$

综上所述：当 $t = 6$ 、5、4 时，对应四边形分别是平行四边形、直角梯形、等腰梯形。

(3) 由 (2) 及已知， $\angle COB = 60^\circ$ ， $OC = OB$ ， $\triangle OCB$ 是等边三角形

则 $OB = OC = AD = 6$ ， $OP = t$ ， $BQ = 2t$ ， $\therefore OQ = 6 - 2t (0 < t < 3)$

过 P 作 $PE \perp OQ$ 于 E ，则 $PE = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$\therefore S_{BCPQ} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (6 - 2t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{63}{8}\sqrt{3}$$

当 $t = \frac{3}{2}$ 时， S_{BCPQ} 的面积最小值为 $\frac{63}{8}\sqrt{3}$

$$\therefore \text{此时 } OQ = 3, OP = \frac{3}{2}, OE = \frac{3}{4} \quad \therefore QE = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad PE = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{PE^2 + QE^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \left(\frac{9}{4} \right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5、解.(1) 点 A 的坐标为 (4, 8)

将 A (4,8)、C (8, 0) 两点坐标分别代入 $y = ax^2 + bx$

$$\begin{aligned} &\text{得} \begin{cases} 8 = 16a + 4b \\ 0 = 64a + 8b \end{cases} \\ &\text{解} \quad \text{得 } a = -\frac{1}{2}, b = 4 \end{aligned}$$

\therefore 抛物线的解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

(2) ①在 $\text{Rt}\triangle APE$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\tan \angle PAE = \frac{PE}{AP} = \frac{BC}{AB}$ ，即 $\frac{PE}{AP} = \frac{4}{8}$

$$\therefore PE = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} t. \quad PB = 8 - t.$$

\therefore 点 E 的坐标为 $\left(4 + \frac{1}{2}t, 8 - t \right)$.

∴点 G 的纵坐标为： $-\frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{2}t\right) + 4\left(4 + \frac{1}{2}t\right) = -\frac{1}{8}t^2 + 8$5 分

$$\therefore EG = -\frac{1}{8}t^2 + 8 - (8 - t) = -\frac{1}{8}t^2 + t.$$

∵ $-\frac{1}{8} < 0$, ∴当 $t=4$ 时, 线段 EG 最长为 2.7 分

②共有三个时刻.8 分

$$t_1 = \frac{16}{3}, \quad t_2 = \frac{40}{13}, \quad t_3 = \frac{8\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}. \quad t = 40 - 16\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

6、解：(1) $OC=1$, 所以, $q=-1$, 又由面积知 $0.5OC \times AB = \frac{5}{4}$, 得 $AB = \frac{5}{2}$,

设 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $AB = b - a = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \frac{5}{2}$, 解得 $p = \pm \frac{3}{2}$, 但 $p < 0$, 所以 $p = -\frac{3}{2}$ 。

$$\text{所以解析式为: } y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

(2) 令 $y=0$, 解方程得 $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$, 得 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, 所以 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, $B(2, 0)$, 在直角三

角形 AOC 中可求得 $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 同样可求得 $BC = \sqrt{5}$, 显然 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 得 $\triangle ABC$ 是直

角三角形。AB 为斜边, 所以外接圆的直径为 $AB = \frac{5}{2}$, 所以 $-\frac{5}{4} \leq m \leq \frac{5}{4}$ 。

(3) 存在, $AC \perp BC$, ①若以 AC 为底边, 则 $BD \parallel AC$, 易求 AC 的解析式为 $y = -2x - 1$, 可设 BD

的解析式为 $y = -2x + b$, 把 $B(2, 0)$ 代入得 BD 解析式为 $y = -2x + 4$, 解方程组
$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$
 得

$$D\left(-\frac{5}{2}, 9\right)$$

②若以 BC 为底边, 则 $BC \parallel AD$, 易求 BC 的解析式为 $y = 0.5x - 1$, 可设 AD 的解析式为

$y=0.5x+b$, 把 $A(-\frac{1}{2}, 0)$ 代入得 AD 解析式为 $y=0.5x+0.25$, 解方程组 $\begin{cases} y=x^2-\frac{3}{2}x-1 \\ y=0.5x+0.25 \end{cases}$ 得

$D(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 综上, 所以存在两点: $(-\frac{5}{2}, 9)$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

7、解: (1) 根据题意, 得 $\begin{cases} -3a=4a+2b-3, \\ -\frac{b}{2a}=1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$ \therefore 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$. 3分

(2) 存在.

在 $y=x^2-2x-3$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=-3$.

令 $y=0$, 得 $x^2-2x-3=0$, $\therefore x_1=-1, x_2=3$.

$\therefore A(-1,0), B(3,0), C(0,-3)$.

又 $y=(x-1)^2-4$, \therefore 顶点 $M(1,-4)$.

容易求得直线 CM 的表达式是 $y=-x-3$.

在 $y=-x-3$ 中, 令 $y=0$, 得 $x=-3$.

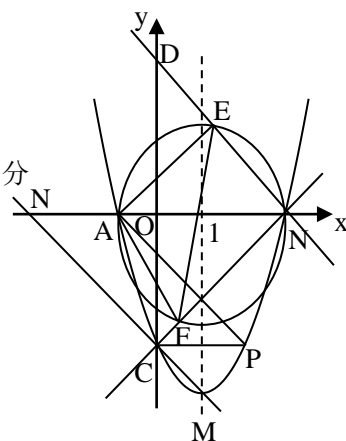
$\therefore N(-3,0)$, $\therefore AN=2$.

在 $y=x^2-2x-3$ 中, 令 $y=-3$, 得 $x_1=0, x_2=2$.

$\therefore CP=2, \therefore AN=CP$.

$\therefore AN \parallel CP$, \therefore 四边形 $ANCP$ 为平行四边形, 此时 $P(2,-3)$.

(3) $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形.



(第7题图)

理由：在 $y = -x + 3$ 中，令 $x = 0$ ，得 $y = 3$ ，令 $y = 0$ ，得 $x = 3$ 。

\therefore 直线 $y = -x + 3$ 与坐标轴的交点是 $D(0,3)$ ， $B(3,0)$ 。

$\therefore OD = OB$ ， $\therefore \angle OBD = 45^\circ$ 。

又 \because 点 $C(0,-3)$ ， $\therefore OB = OC$ 。 $\therefore \angle OBC = 45^\circ$ 。

由图知 $\angle AEF = \angle ABF = 45^\circ$ ， $\angle AFE = \angle ABE = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle EAF = 90^\circ$ ，且 $AE = AF$ 。 $\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形。

(4) 当点 E 是直线 $y = -x + 3$ 上任意一点时，(3) 中的结论成立。

NO.8

自测题答案：

1、解：由 $\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0$ ，得 $x = -4$ 。 $\therefore A$ 点坐标为 $(-4,0)$ 。

由 $-2x + 16 = 0$ ，得 $x = 8$ 。 $\therefore B$ 点坐标为 $(8,0)$ 。 $\therefore AB = 8 - (-4) = 12$ 。

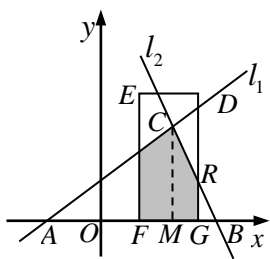
由 $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = -2x + 16 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$ 。 $\therefore C$ 点的坐标为 $(5,6)$ 。

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot y_C = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36.$$

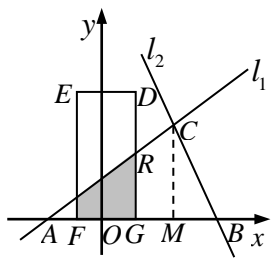
(2) 解: \because 点 D 在 l_1 上且 $x_D = x_B = 8$, $\therefore y_D = \frac{2}{3} \times 8 + \frac{8}{3} = 8$. $\therefore D$ 点坐标为 $(8, 8)$. 又 \because 点 E 在 l_2 上且 $y_E = y_D = 8$, $\therefore -2x_E + 16 = 8$. $\therefore x_E = 4$. $\therefore E$ 点坐标为 $(4, 8)$.

$$\therefore OE = 8 - 4 = 4, EF = 8.$$

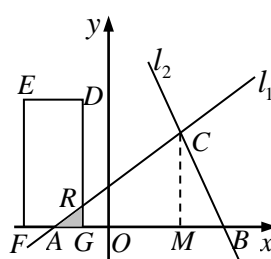
(3) 解法一: ① 当 $0 \leq t < 3$ 时, 如图 1, 矩形 $DEFG$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分为五边形 $CHFGR$ ($t=0$ 时, 为四边形 $CHFG$). 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 则 $\text{Rt}\triangle RGB \sim \text{Rt}\triangle CMB$.



(图 1)



(图 2)



(图 3)

$$\therefore \frac{BG}{BM} = \frac{RG}{CM}, \text{ 即 } \frac{t}{3} = \frac{RG}{6}, \therefore RG = 2t. \therefore \text{Rt}\triangle AFH \sim \text{Rt}\triangle AMC,$$

$$\therefore S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BRG} - S_{\triangle AFH} = 36 - \frac{1}{2} \times t \times 2t - \frac{1}{2} (8-t) \times \frac{2}{3} (8-t).$$

$$\text{即 } S = -\frac{4}{3}t^2 + \frac{16}{3}t + \frac{44}{3} \quad (0 \leq t < 3)$$

$$S = \frac{80}{3} - \frac{8}{3}t \quad (3 < t \leq 8)$$

$$S = \frac{1}{3}(12-x)^2 \quad (8 \leq t \leq 12)$$

2、解: (1) 如图, \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AB = CD, AD = BC$.

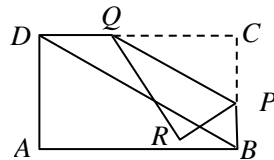
又 $AB = 9, AD = 3\sqrt{3}, \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore CD = 9, BC = 3\sqrt{3}.$$

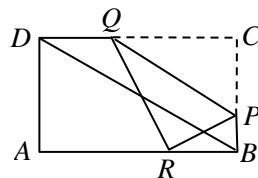
$$\therefore \tan \angle CDB = \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle CDB = 30^\circ.$$

$$\therefore PQ \parallel BD, \therefore \angle CQP = \angle CDB = 30^\circ.$$

(2) 如图 1, 由轴对称的性质可知, $\triangle RPQ \cong \triangle CPQ$,



(第 2 题)



(图 1)

$$\therefore \angle RPQ = \angle CPQ, \quad RP = CP.$$

由(1)知 $\angle CQP = 30^\circ$, $\therefore \angle RPQ = \angle CPQ = 60^\circ$,

$$\therefore \angle RPB = 60^\circ, \quad \therefore RP = 2BP.$$

$$\because CP = x, \quad \therefore PR = x, \quad PB = 3\sqrt{3} - x.$$

在 $\triangle RPB$ 中, 根据题意得: $2(3\sqrt{3} - x) = x$,

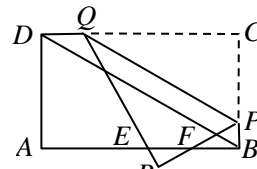
解这个方程得: $x = 2\sqrt{3}$.

(3) ①当点 R 在矩形 $ABCD$ 的内部或 AB 边上时,

$$0 < x \leq 2\sqrt{3}, \quad S_{\triangle CPQ} = \frac{1}{2} \times CP \times CQ = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2,$$

$$\because \triangle RPQ \cong \triangle CPQ, \quad \therefore \text{当 } 0 < x \leq 2\sqrt{3} \text{ 时, } y = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

当 R 在矩形 $ABCD$ 的外部时 (如图 2), $2\sqrt{3} < x < 3\sqrt{3}$,



(图 2)

在 $\text{Rt}\triangle PFB$ 中, $\because \angle RPB = 60^\circ$,

$$\therefore PF = 2BP = 2(3\sqrt{3} - x),$$

$$\text{又} \because RP = CP = x, \quad \therefore RF = RP - PF = 3x - 6\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ERF$ 中,

$$\because \angle EFR = \angle PFB = 30^\circ, \quad \therefore ER = \sqrt{3}x - 6.$$

$$\therefore S_{\triangle ERF} = \frac{1}{2} ER \times FR = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 - 18x + 18\sqrt{3},$$

$$\because y = S_{\triangle RPQ} - S_{\triangle ERF},$$

$$\therefore \text{当 } 2\sqrt{3} < x < 3\sqrt{3} \text{ 时, } y = -\sqrt{3}x^2 + 18x - 18\sqrt{3}.$$

$$\text{综上所述, } y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数解析式是: } y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 (0 < x \leq 2\sqrt{3}) \\ -\sqrt{3}x^2 + 18x - 18\sqrt{3} (2\sqrt{3} < x < 3\sqrt{3}) \end{cases}.$$

②矩形面积 $= 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$, 当 $0 < x \leq 2\sqrt{3}$ 时, 函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$ 随自变量的增大而增

大，所以 y 的最大值是 $6\sqrt{3}$ ，而矩形面积的 $\frac{7}{27}$ 的值 $= \frac{7}{27} \times 27\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ ，

而 $7\sqrt{3} > 6\sqrt{3}$ ，所以，当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时， y 的值不可能是矩形面积的 $\frac{7}{27}$ ；

当 $2\sqrt{3} < x < 3\sqrt{3}$ 时，根据题意，得：

$-\sqrt{3}x^2 + 18x - 18\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ ，解这个方程，得 $x = 3\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ ，因为 $3\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3\sqrt{3}$ ，

所以 $x = 3\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 不合题意，舍去。

所以 $x = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。

综上所述，当 $x = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 时， $\triangle PQR$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积等于矩形面积的 $\frac{7}{27}$

3、解：(1) $\because \angle APQ + \angle CPQ = \angle B + \angle BAP$ ， $\angle APQ = \angle ABC$ ，

$$\therefore \angle BAP = \angle CQP.$$

又 $\because AB = AC$ ， $\therefore \angle B = \angle C$ 。

$$\therefore \triangle QCP \sim \triangle ABP.$$

$$\therefore \frac{CQ}{BP} = \frac{CP}{AB}.$$

$$\because AB = AC = 5, BC = 8, BP = 6, CP = 8 - 6 = 2,$$

$$\therefore \frac{CQ}{6} = \frac{2}{5}, CQ = \frac{12}{5}.$$

(2) 若点 P 在线段 CB 上，由 (1) 知 $\frac{CQ}{BP} = \frac{CP}{AB}$ 。

$$\because BP = x, BC = 8, \therefore CP = BC - BP = 8 - x,$$

$$\text{又} \because CQ = y, AB = 5, \therefore \frac{y}{x} = \frac{8-x}{5}, \text{即 } y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x.$$

故所求的函数关系式为 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$ ，($0 < x < 8$)。

若点 P 在线段 CB 的延长线上，如图 11。

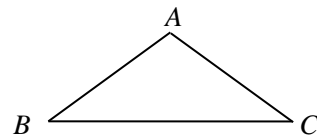
$$\because \angle APQ = \angle APB + \angle CPQ,$$

$$\angle ABC = \angle APB + \angle PAB,$$

$$\angle APQ = \angle ABC, \therefore \angle CPQ = \angle PAB.$$

$$\text{又} \because \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC,$$

$$\angle PCQ = 180^\circ - \angle ACB, \angle ABC = \angle ACB,$$



备用图

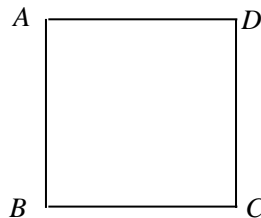
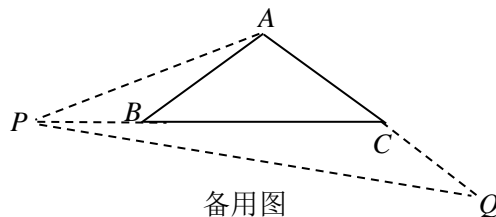


图 12



备用图

$$\therefore \angle ABP = \angle PCQ. \therefore \triangle QCP \sim \triangle PBA. \therefore \frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{PC}.$$

$$\therefore BP = x, CP = BC + BP = 8 + x, AB = 5, CQ = y,$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{8+x}, \text{ 即 } y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \quad (x > 0).$$

$$(2) \text{ 当点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 上, } BP = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \text{ 或 } BP = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{当点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 的延长线上, 则点 } Q \text{ 在线段 } DC \text{ 的延长线上, } BP = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{当点 } P \text{ 在线段 } CB \text{ 的延长线上, 则点 } Q \text{ 在线段 } DC \text{ 的延长线上, } BP = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}.$$

4、解：(1) $\triangle ABF \sim \triangle GBC$, $\triangle FDE \sim \triangle CGE \sim \triangle BCE$

(2) 方法一： $\because BE$ 平分 $\angle B$, $\therefore \angle ABE = \angle EBC$,

$\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle AFB = \angle EBC$, $\therefore \angle ABE = \angle AFB$, $\therefore AB = AF$,

$\therefore AF = 4$, $DF = 1$,

$$\because AD \parallel BC, \therefore DF:BC = DE:EC, \therefore DE = \frac{2}{3}, CE = \frac{10}{3}$$

$\because AD \parallel BC$, $AB = CD$, $\therefore \angle BCD = \angle ABC$

$\because CG$ 平分 $\angle BCD$, BE 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle CBG = \angle BCG$, $\therefore BG = CG$

设 $BG = CG = x$, 则由 $\triangle FDE \sim \triangle CGE$, 得 $DF:CG = DE:GE$, $\therefore GE = \frac{2}{3}x$

又由 $\triangle CGE \sim \triangle BCE$, 得 $EC^2 = EG \cdot EB$, 即 $(\frac{10}{3})^2 = \frac{2}{3}x \cdot (x + \frac{2}{3}x)$

$$\therefore x = \sqrt{10}, \text{ 即 } BG = \sqrt{10}$$

方法二：求得 $DF = 1$,

$$\text{求得 } DE = \frac{2}{3}, CE = \frac{10}{3}$$

由 $DF:BC = 1:5$ 设 $EF = x$, $BE = 5x$, 由 $\triangle FDE \sim \triangle CGE$, 得 $CG = \frac{10}{3x}$

又由 $\triangle CGE \sim \triangle BCE$, 得 $EC^2 = EG \cdot EB$, 即 $(\frac{10}{3})^2 = (5x - \frac{10}{3x})5x$, 得 $x = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$$\text{再得 } BG = CG = \frac{10}{3x} = \sqrt{10}$$

(3) ①当 $\frac{4}{5}\sqrt{10} < BP \leq \sqrt{10}$ 时, 点 A 在 $\odot P$ 内。

②当 $\frac{4}{5}\sqrt{10} < BP < \frac{5}{6}\sqrt{10}$ 时点 A 在 $\odot P$ 内而点 E 在 $\odot P$ 外。

5、解：（1）联结 OC ， $\because AC$ 是 $\odot O$ 的弦， $OD \perp AC$ ， $\therefore OD=AD$ 。

$$\because DF \parallel AB, \therefore CF=EF, \therefore DF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AO+OE).$$

\because 点 C 是以 AB 为直径的半圆的中点， $\therefore CO \perp AB$ 。

$$\because EF=x, AO=CO=4, \therefore CE=2x, OE=\sqrt{CE^2-OC^2}=\sqrt{4x^2-16}=2\sqrt{x^2-4}.$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{x^2-4})=2+\sqrt{x^2-4}. \text{ 定义域为 } x \geq 2.$$

（2）当点 F 在 $\odot O$ 上时，联结 OC 、 OF ， $EF=\frac{1}{2}CE=OF=4$ ， $\therefore OC=OB=\frac{1}{2}AB=4$ 。（1

分）

$$\therefore DF=2+\sqrt{4^2-4}=2+2\sqrt{3}.$$

（3）当 $\odot E$ 与 $\odot O$ 外切于点 B 时， $BE=FE$ 。 $\because CE^2-OE^2=CO^2$ ，

$$\therefore (2x)^2-(x+4)^2=4^2, \quad 3x^2-8x-32=0,$$

$$\therefore x_1=\frac{4+4\sqrt{7}}{3}, \quad x_2=\frac{4-4\sqrt{7}}{3}(\text{舍去}).$$

$$\therefore DF=\frac{1}{2}(AB+BE)=\frac{1}{2}(8+\frac{4+4\sqrt{7}}{3})=\frac{14+2\sqrt{7}}{3}.$$

当 $\odot E$ 与 $\odot O$ 内切于点 B 时， $BE=FE$ 。 $\because CE^2-OE^2=CO^2$ ，

$$\therefore (2x)^2-(4-x)^2=4^2, \quad 3x^2+8x-32=0,$$

$$\therefore x_1=\frac{-4+4\sqrt{7}}{3}, \quad x_2=\frac{-4-4\sqrt{7}}{3}(\text{舍去}).$$

$$\therefore DF=\frac{1}{2}(AB-BE)=\frac{1}{2}(8-\frac{-4+4\sqrt{7}}{3})=\frac{14-2\sqrt{7}}{3}.$$

当 $\odot E$ 与 $\odot O$ 内切于点 A 时， $AE=FE$ 。 $\because CE^2-OE^2=CO^2$ ，

$$\therefore (2x)^2-(4-x)^2=4^2, \quad 3x^2+8x-32=0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{-4+4\sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{-4-4\sqrt{7}}{3} (\text{舍去}).$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AE = \frac{2\sqrt{7}-2}{3}.$$

$$\text{综上所述: } DF = \frac{14 \pm 2\sqrt{7}}{3} \text{ 或 } DF = \frac{2\sqrt{7}-2}{3}.$$

6、解：（1）过点 D 作 $DM \perp AC$ ，垂足为 M 。

由题意，可知 $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形， $\therefore AQ = \sqrt{2}x$ ；

易得 $\triangle CMD \sim \triangle CAB$ ， $\therefore \frac{CM}{DM} = \frac{CA}{AB} = \frac{3}{4}$ ；

设 $CM = 3x$ ， $DM = 4x$ ， $\therefore AM = 4x$ ， $\therefore x = \frac{3}{7}$ ， $DM = AM = \frac{12}{7}$

$$\therefore AD = \frac{12}{7}\sqrt{2}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x - \frac{12}{7}\sqrt{2}.$$

定义域是： $\frac{12}{7} \leq x \leq 4$ 。

（2） $\because \angle CDQ = \angle ADB$ ， \therefore 当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时，分以下两种情况：

1° 当 $\angle QCD = \angle B$ 时， $\therefore CQ \parallel AB$ ，易得四边形 $CAPQ$ 是正方形；

$$\therefore x = AP = AC = 3.$$

2° 当 $\angle QCD = \angle QAB$ 时， $\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{QD}{BD}$ ，

由上述（1）的解法，可得 $CD = \frac{15}{7}$ ， $BD = \frac{20}{7}$

$$\therefore \frac{12}{7}\sqrt{2}y = \frac{15}{7} \times \frac{20}{7}, \quad \therefore y = \frac{25\sqrt{2}}{14};$$

$$\therefore \sqrt{2}x - \frac{12}{7}\sqrt{2} = \frac{25\sqrt{2}}{14}, \quad \text{解得 } x = \frac{7}{2}.$$

综合 1°、2°，当 $\triangle CDQ$ 和 $\triangle ADB$ 相似时， x 的值为 3 或 $\frac{7}{2}$ 。

（3）如图，设 $\odot C$ 与 $\odot B$ 相交的另一个交点为 M ，联结 QM 交 BC 于点 N 。

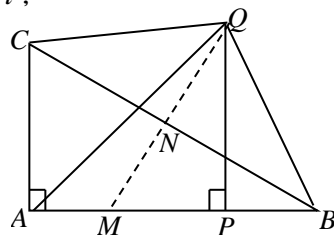
$\therefore BC \perp QM$ ， $QN = MN$ 。易得 $\triangle BMN \sim \triangle CAB$ ， $\triangle QPM \sim \triangle CAB$ ，

$$\therefore \frac{MN}{BN} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}, \text{ 设 } MN = 3t, \quad BN = 4t, \quad \therefore BM = 5t;$$

$$\therefore QM = 6t, \quad \therefore PQ = \frac{24}{5}t; \quad \because BQ = BM = 5t, \quad \therefore BP = \frac{7}{5}t;$$

$$\text{又 } AP = PQ = \frac{24}{5}t, \quad \therefore \frac{24}{5}t + \frac{7}{5}t = 4, \text{ 解得 } t = \frac{20}{31};$$

$$\therefore AP = \frac{24}{5} \times \frac{20}{31} = \frac{96}{31}.$$



解：(1)解法一：连接 OC ， $\because OA$ 是 $\odot P$ 的直径， $\therefore OC \perp AB$ ，

$$\text{在 } Rt\triangle AOC \text{ 中}, \quad OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

在 $Rt\triangle AOC$ 和 $Rt\triangle ABO$ 中， $\because \angle CAO = \angle OAB$

$$\therefore Rt\triangle AOC \sim Rt\triangle ABO, \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{AC}{CO} = \frac{AO}{OB}, \quad \text{即 } \frac{3}{4} = \frac{5}{OB},$$

$$\therefore OB = \frac{20}{3}, \quad \therefore B(0, \frac{20}{3})$$

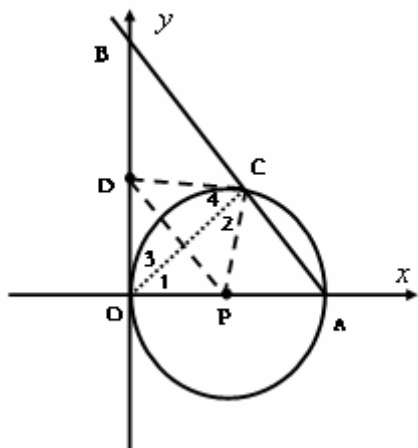
解法二：连接 OC ，因为 OA 是 $\odot P$ 的直径， $\therefore \angle ACO = 90^\circ$

在 $Rt\triangle AOC$ 中， $AO = 5$ ， $AC = 3$ ， $\therefore OC = 4$ ，

过 C 作 $CE \perp OA$ 于点 E ，则： $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot OC$ ，

$$\text{即：} \frac{1}{2} \times 5 \times CE = \frac{1}{2} \times 3 \times 4, \quad \therefore CE = \frac{12}{5},$$

$$\therefore OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{4^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{16}{5} \quad \therefore C(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}),$$



设经过 A、C 两点的直线解析式为： $y = kx + b$.

把点 $A(5, 0)$ 、 $C(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ 代入上式得：

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ \frac{16}{5}k + b = \frac{12}{5} \end{cases}, \quad \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{20}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}, \quad \therefore \text{点 } B(0, \frac{20}{3}).$$

(2) 点 O、P、C、D 四点在同一个圆上，理由如下：

连接 CP、CD、DP， $\because OC \perp AB$ ，D 为 OB 上的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}OB = OD,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4, \text{ 又 } \because OP = CP, \therefore \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$\therefore PC \perp CD$ ，又 $\because DO \perp OP$ ， $\therefore Rt\triangle PDO$ 和 $Rt\triangle PDC$ 是同以 PD 为斜边的直角三角形，

$\therefore PD$ 上的中点到点 O、P、C、D 四点的距离相等，

\therefore 点 O、P、C、D 在以 DP 为直径的同一个圆上；

由上可知，经过点 O、P、C、D 的圆心 O_1 是 DP 的中点，圆心 $O_1(\frac{OP}{2}, \frac{OD}{2})$ ，

由(1)知： $Rt\triangle AOC \sim Rt\triangle ABO$ ， $\therefore \frac{AC}{OA} = \frac{OA}{AB}$ ，求得： $AB = \frac{25}{a}$ ，在 $Rt\triangle ABO$ 中，

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{5\sqrt{25 - a^2}}{a}, \quad OD = \frac{1}{2}OB = \frac{5\sqrt{25 - a^2}}{2a}, \quad OP = \frac{OA}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore O_1(\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{25 - a^2}}{4a}), \text{ 点 } O_1 \text{ 在函数 } y = \frac{k}{x} \text{ 的图象上,}$$

$$\therefore \frac{5\sqrt{25-a^2}}{4a} = \frac{4k}{5}, \quad \therefore k = \frac{25\sqrt{25-a^2}}{16a} .$$