

NO.1 实数与运算

1、选择题:

(1)B; (2)D; (3)D; (4)A; (5)D; (6)C.

2、填空题:

(1)-0.02 (2)> (3) $4 - \sqrt{3}$ (4) $\frac{25}{74}$

(5) 734 (6) n^2 (7) 36 (8) 1

(9) 9 (10) $4n+2$

详细答案:

(4) 在 100 以内 (包含 100) 的正整数数中, 素数有 25 个, 合数是 $99-25=74$, (这里 1 既不是素数也不是合数), 所以素数的个数是合数个数的 $\frac{25}{74}$.

(7) 本题主要考查规律探索。

由平移的性质可知, $a+b=m-i+n-j$,

$$\text{即 } a+b=m-i+n-j=10$$

$$\text{所以 } m+n=10+i+j$$

当 $m+n$ 取最小值时, $i+j$ 最小值为 2, 所以的最小值为 12,

又因为 $12=1+11=2+10=3+9=4+8=5+7=6+6$, 所以 $m \cdot n$ 的最大值为 36。

故本题正确答案为 36。

(10) 规律: 6、10、14、 \dots 、 $4n+2$

$$\begin{aligned} \text{计算 } S_{n+1} - S_n &= [(n+1)\sqrt{2}]^2 - (n\sqrt{2})^2 = 2(n^2 + 2n + 1) - 2n^2 \\ &= 4n + 2 \end{aligned}$$

3、计算题:

(1) 4; (2) -2; (3) $3 - \sqrt{3}$;

(4) $3 - 2\sqrt{3}$; (5) $3 + \sqrt{2}$; (6) 3.

4、解答题:

(1)解: 每隔 15 米种一棵树, 两端各植一棵共 41 棵,;

每隔 25 米种一棵树, 两端各植一棵共 25 棵,

因为, 15 与 25 的最小公倍数是 75,

所以, 公共的坑有 9 个,

因此,有 32 个坑要天掉,还要挖 16 个坑。

(2) 解: 153

(3) 【分析】本题可依次解出 $n=1, 2, 3, \dots$, 钢管的个数. 再根据规律以此类推, 可得出第 n 堆的钢管个数.

【解答】解: 第一个图中钢管数为 $1+2=3$;

第二个图中钢管数为 $2+3+4=9$;

第三个图中钢管数为 $3+4+5+6=18$;

第四个图中钢管数为 $4+5+6+7+8=30$,

依此类推, 第 n 个图中钢管数为 $n+(n+1)+(n+2)+\dots+2n=(2n+n)\cdot\frac{n}{2}+\frac{2n+n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

故答案为: $\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

【点评】本题是一道找规律的题目, 这类题型在中考中经常出现. 对于找规律的题目首先应找出哪些部分发生了变化, 是按照什么规律变化的.

(4) 【考点】规律型: 数字的变化类.

【分析】先按图示规律计算出每一层的第一个数和最后一个数; 发现第一个数分别是每一层层数的平方, 那么只要知道 2016 介于哪两个数的平方即可, 通过计算可知: $44^2 < 2016 < 45^2$, 则 2016 在第 44 层.

【解答】解: 第一层: 第一个数为 $1^2=1$, 最后一个数为 $2^2-1=3$,

第二层: 第一个数为 $2^2=4$, 最后一个数为 $3^2-1=8$,

第三层: 第一个数为 $3^2=9$, 最后一个数为 $4^2-1=15$,

$\therefore 44^2=1936, 45^2=2025$,

又 $\therefore 1936 < 2016 < 2025$,

\therefore 在上述数字宝塔中, 从上往下数, 2016 在第 44 层,

故答案为: 44

【点评】本题考查了数学变化类的规律题, 这类题的解题思路是: ①从第一个数起, 认真观察、仔细思考, 能不能用平方或奇偶或加、减、乘、除等规律来表示; ②利用方程来解决问题, 先设一个未知数, 找到符合条件的方程即可; 本题以每一行的第一个数为突破口, 找出其规律, 得出结论.

(5) .解析: 此题有些难度, 第一问简单, 先求 $\angle 2$, 再求 $\angle AA_1A_2$, 进而求 $\angle A$; 第二问有些难度, 原路返回, 那么最后的线垂直于 BO, 中间的角, 从里往外, 是 7° 的 2 倍, 4 倍, 8 倍....., 2 $\angle 41^\circ \times 160^\circ$ 在利用外角性质, $\angle A = \angle 1 - 7^\circ = 83^\circ - 7^\circ \times n$, 当 $n=11$ 时, $\angle A=6^\circ$.

(6) (a) 是的;

(b) $(2k+2)^2 - (2k)^2 = 4(2k+1)$ 是 4 的倍数;

(c) $(2k+2)^2 - (2k)^2 = 8k = 4 \cdot 2k$, $2k$ 是偶数, 所以不是神秘数。

(7) 略解: 原题相当于: 已知 a 、 b 、 c 、 d 满足

$$ab + cd = 1 \quad ① \quad \text{和}$$

$$(a-1)(b+1) + (c+1)(d-1) = 10 \quad ②$$

求 $(a-10)(b+10) + (c+10)(d-10)$ ③ 的值

②式展开后与①式相减可得 $a - b - c + d = 11$ ④,

③式展开式得 $ab + cd + 10(a - b - c + d) - 200$ ⑤,

④ 代入得③ 式的值为 $1+110-200=-89$.

$$(8) \quad \overline{a5}^2 = (10a+5)^2 = 100a(a+1) + 25;$$

即 $\overline{a5}^2$ 等于 a 与 $a+1$ 的积后面添上 25.

$$(9) \quad \square - \triangle = 3; \quad \square + \triangle = 11, \quad \text{所以: } \square = 7, \quad \triangle = 4, \quad \text{即 } 42\square 28\triangle = 427284;$$

$42\square 28\triangle$ 可以被 8 整除, $\triangle = 8$ 或 $\triangle = 0$

当 $\triangle = 8$ 时, $\square = 0$, 即 $42\square 28\triangle = 420288$.

当 $\triangle = 0$ 时, $\square = 3$ 即 $42\square 28\triangle = 423280$.

$$(10) \quad x = 3, y = 2 \quad \text{所以 } \overline{x679y} = 36792$$

(11)

考点: 规律型: 数字的变化类; 算术平方根.

分析: 根据被开方数是连续的自然数写出即可; 根据每一行的最后一个数的被开方数是所在的行数乘比行数大 1 的数写出第 $(n-1)$ 的最后一个数, 然后被开方数加上 $(n-2)$ 即可.

解答: \because 第 $(n-1)$ 的最后一个数是 $\sqrt{(n-1)(n-1+1)}$

\therefore 第 n ($n \geq 3$ 且 n 是整数) 行从左向右数第 $n-2$ 个数是

$$\sqrt{(n-1)(n-1+1) + n - 2} = \sqrt{n^2 - 2} \quad \text{故答案为: } \sqrt{n^2 - 2}.$$

点评: 本题是对数字变化规律的考查, 观察出被开方数是连续自然数并且每一行的最后一个数的被开方数是所在的行数乘比行数大 1 的数是解题的关键. 另一种思考方法更简单: 本题是对数字变化规律的考查, 观察出被开方数是连续自然数, 并且第 n 行的第 n 列恰好是 n , 这是解题的关键所以, 第 n

(n 是整数, 且 $n > 3$) 行从左向右数第 $n-2$ 个数是 $\sqrt{n^2 - 2}$.

(12) 9.

(13) $(8\sqrt{3}+4)\pi$.(14) ① $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ② $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(15) 16

(16) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(17) ①解:

$$\frac{13}{\sqrt{35-8(\sqrt{3}+2)}} = \frac{13}{\sqrt{19-8\sqrt{3}}} = \frac{13}{4-\sqrt{3}} = 4+\sqrt{3}$$

(17) ②解: 设 $a=2009$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1+\sqrt{a+1}(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \sqrt{a-1} \\ &= \frac{1+\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a-1}+a-1+\sqrt{a-1}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a-1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} \\ &= \sqrt{a} \\ &= \sqrt{2009} \end{aligned}$$

(17) ③解:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}= \\ &\frac{1\times 2+1}{1\times 2}+\frac{2\times 3+1}{2\times 3}+\frac{3\times 4+1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1010\times 1011+1}{1010\times 1011} \\ &= 1010+1-\frac{1}{1011}=1010\frac{1010}{1011} \end{aligned}$$

(18) 已知实数 x, y 满足 $(x+\sqrt{x^2-2010})(y+\sqrt{y^2-2010})-2010=0$, 求 x, y 的值

将等式乘以 $\frac{x-\sqrt{x^2-2010}}{x-\sqrt{x^2-2010}}$, 然后分子可利用平方差公式进行化简, 化简后移项, 运用完全平方公式两次化简可得出 x 和 y 的关系, 继而代入可解出答案.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \because (x + \sqrt{x^2 - 2010})(y + \sqrt{y^2 - 2010}) - 2010 = 0, \\ & \therefore \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2010})(x - \sqrt{x^2 - 2010})(y + \sqrt{y^2 - 2010})}{x - \sqrt{x^2 - 2010}} = 2010, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2010(y + \sqrt{y^2 - 2010})}{x - \sqrt{x^2 - 2010}} = 2010$$

$$\therefore x - y = \sqrt{y^2 - 2010} + \sqrt{x^2 - 2010},$$

$$\text{两边平方整理得: } 2010 - xy = \sqrt{(y^2 - 2010)(x^2 - 2010)},$$

$$\text{两边平方整理得: } x^2 - 2xy + y^2 = 0,$$

$$\text{计算得出: } x = y,$$

$$\text{将 } x = y \text{ 代入代入可得: } x = \pm\sqrt{2010}, y = \pm\sqrt{2010}.$$

$$\text{因此, 本题正确答案是: } \pm\sqrt{2010}, \pm\sqrt{2010}.$$

NO.2 代数式

1、选择题:

(1) D; (2) C; (3) D; (4) C; (5) D; (6) D.

2、填空题:

- (1) $\frac{ab}{c}$; (2) $a(1-x)^2$; (3) $\frac{511}{256}$;
 (4) 2; (5) 2017; (6) $m=1$
 (7) $x \leq 1$ 且 $x \neq -2$; (8) $a=0, b=3, c=11$, 原式 = 66;
 (9) $\frac{3}{5}$; (10) 3 或 -1;

3. 因式分解:

- (1) $x(x+y)(x+z)$
 (2) $(c-a)((a+b)(b+c))$
 (3) $(a^2+a+1)^2$
 (4) $(6x-3y-2)(10x-5y-4)$
 (5) $(x^2+6y^2+3xy)(x^2+6y^2-3xy)$

解答题:

- (1) $\frac{a^2+1}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; (2) 1;
 (3) 原式 = $\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{abc} = 0$;
 (4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6, \therefore \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$;
 (5) $y = \frac{a^2}{a-x}, z = a - \frac{a^2}{x}$, 所以, 原式 = a ;
 (6) $k = -2$;

(7)

$$S = \frac{2}{3}(7-5|b|) \leq \frac{14}{3}, \text{ 又 } |b| = \frac{7-3\sqrt{a}}{5} \geq 0,$$

$$\text{故 } \sqrt{a} \leq \frac{7}{3}, \text{ 所以, } -\frac{21}{5} \leq S \leq \frac{14}{3}$$

(8) $\sqrt{m} + 2\sqrt{n} = 3; \sqrt{m} + 2\sqrt{n} = -1$ (舍) 原式 = $-\frac{1}{401}$

(9)

答案

$$\because (y-z)^2 + (x-y)^2 + (z-x)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2.$$

$$\therefore (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0.$$

$\because x, y, z$ 均为实数,

$$\therefore x = y = z.$$

$$\therefore \frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} = \frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} = 1.$$

先将已知条件化简, 可得: $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0$. 因为 x, y, z 均为实数, 所以 $x = y = z$. 将所求代数式中所有 y 和 z 都换成 x , 计算即可.

(10) 解: (1) 第一次只能得到 $1 \times 4 + 1 + 4 = 9$; 因为要求最大新数, 所以, 第二次取 4 和 9, 得到 $4 \times 9 + 4 + 9 = 49$; 同理, 第三数取 9 和 49, 就得到扩充三次的最大数为 499.

(2) 因 $c = ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1$, 故 $c+1 = (a+1)(b+1)$,

取数 b, c 可得新数 $d = (b+1)(c+1) - 1 = (b+1)(a+1)(b+1) - 1 = (a+1)(b+1)^2 - 1$,
即 $d+1 = (a+1)(b+1)^2$,

同理可得 $e = (c+1)(d+1) - 1 = (a+1)(b+1)(a+1)(b+1)^2 - 1$, $e+1 = (a+1)^2(b+1)^3$

第四次扩充: $49 \times 499 + 49 + 499 = 24999 > 1999$,

即第三次得到的新数为 499, 第四次得到的新数为 24999,

故 1999 不可以通过上述规则扩充得到.

解析

做好本类题目的关键是要根据表达式与文字规则, 弄清给定数值字符间蕴含的加减乘除运算关系. 如本题中的按照规则 $c = ab + a + b$, 在 a, b, c 三个数中任取两数, 按规则又可扩充一个新数, \dots 每扩充一个新数叫做一次操作.

NO.3 方程（组）、不等式（组）

1、选择题:

(1) C; (2) D; (3) C; (4) A; (5) B; (6) D.

2、填充题:

(1) (1) 30%; (2) 10%;

(3) 将 $x=2$, $y=\sqrt{3}$ 代入 $\sqrt{3}x = y + a$ 中, 得 $a=\sqrt{3}$ 。

$$\therefore (a+1)(a-1) + 7 = a^2 - 1 + 7 = a^2 + 6 = 9$$

(4) $a < 4$; (5) $\frac{600}{x-5} - \frac{600}{x} = 10$;

(6) 6; (7) $a < 1$ and $a \neq 0$

(8) 答: 将 $b^2 - 4a = 0$ 代入原式 $= \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = 4$

$$(9) \ 2 \pm \sqrt{2} \ ; \qquad (10) \ (0, 2), (\frac{4}{5}, \frac{12}{5}), (-1, \frac{3}{2}), (4, 4) .$$

3、解答题：

(1) 解: 根据题意可得
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ 3\sqrt{5}x - 5y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2\sqrt{5} \\ y = 4 \end{cases}$$

(2) 设一台电脑感染 x 台电脑, 则 $(1+x)^2=81, x_1=-10$ (舍), $x_2=8$

答：一台电脑感染 8 台电脑。

3 轮感染后, 被感染的电脑会不会超过 700 台。

$$\therefore (1+8)^3 = 729 > 700$$

答：3 轮感染后，被感染的电脑会不会超过 700 台。

(3) (a) 因为篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 $8:3:2$ ，所以，可以依次设它们的单价分别为 $8x$ ， $3x$ ， $2x$ 元，于是，得 $8x+3x+2x=130$ ，解得 $x=10$ 。

所以，篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别为 80 元、30 元和 20 元.

(b) 设购买篮球的数量为 y 个，则够买羽毛球拍的数量为 $4y$ 副，购买乒乓球拍的数量

为 $(80 - y - 4y)$ 副，根据题意，得 $\begin{cases} 80y + 30 \times 4y + 20(80 - y - 4y) \leq 3000 & \square \\ 80 - y - 4y \leq 15 & \square \end{cases}$

由不等式①, 得 $y \leq 14$, 由不等式②, 得 $y \geq 13$,

于是, 不等式组的解集为 $13 \leq y \leq 14$, 因为 y 取整数, 所以 y 只能取 13 或 14.

因此, 一共有两个方案:

方案一, 当 $y=13$ 时, 篮球购买 13 个, 羽毛球拍购买 52 副, 乒乓球拍购买 15 副;

方案二, 当 $y=14$ 时, 篮球购买 14 个, 羽毛球拍购买 56 副, 乒乓球拍购买 10 副.

(4). (a) 根据题意, 得:

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{10}x + 8 & (40 < x \leq 60) \\ -\frac{1}{20}x + 5 & (60 < x \leq 100) \end{cases}$$

(b) 设公司安排员工 m 人, 定价为 50 元.

$$x = 50, \text{ 代入 } y = \left(-\frac{1}{10}x + 8\right)(x - 40) - 15 - 0.25m$$

得: $m = 40$

答: 公司安排员工 40 人.

(c) 当 $40 < x \leq 60$ 时,

$$\text{利润 } w_1 = \left(-\frac{1}{10}x + 8\right)(x - 40) - 15 - 0.25 \times 80 = -(x - 60)^2 + 5$$

所以, 当 $x = 60$ 时, $w_{\text{最大值}} = 5$ (万元)

当 $60 < x \leq 100$ 时,

$$\text{利润 } w_2 = \left(-\frac{1}{20}x + 5\right)(x - 40) - 15 - 0.25 \times 80 = -\frac{1}{20}(x - 70)^2 + 10$$

所以, 当 $x = 70$ 时, $w_{\text{最大值}} = 10$ (万元)

样尽快还清贷款, 只有当 $x = 70$ 时, 获得最大利润 10 万元。

又设公司 n 个月后还清贷款, 则 $10n \geq 80$, 所以 $n \geq 8$

答: 最早 8 个月后还清贷款。

(5) 【解析】(1) 根据每张薄板的出厂价 (单位: 元) 由基础价和浮动价两部分组成, 设出厂价的表达式 (为一次函数) 再根据表格中的数据, 求出解析式。(2) 根据利润 = 出厂价 - 成本价, 列出利润的关系式, 为二次函数, 再利用顶点坐标, 求出当边长为多少时, 博班利润最大? 最大利润是多少? 但是需要验证顶点的横坐标在不在 x 的取值范围内。

【答案】解: (1) 设一张薄板的边长为 x cm, 它的出厂价为 y 元, 基础价为 n 元, 浮动价为 kx 元,

则 $y = kx + n$ 2 分

$$\text{由表格中数据得 } \begin{cases} 50 = 20k + n \\ 70 = 30k + n \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} k = 2 \\ n = 10 \end{cases} \quad \therefore y = 2x + 10$$

(2) ①设一张薄板的利润为 P 元，它的成本价为 $m \times 2$ 元，由题意得
 $P = y - m \times 2 = 2x + 10 - m \times 2$

将 $x=40$ ， $P=26$ 代入 $P=2x+10-m \times 2$ 中，得 $26 = 2 \times 40 + 10 - m \times 40^2$ 解得 $m = \frac{1}{25}$

$$\therefore P = -\frac{1}{25}x^2 + 2x + 10$$

$$\textcircled{2} \because a = -\frac{1}{25} < 0 \quad \therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-\frac{1}{25})} = 25 \quad (\text{在 } 5 \sim 50 \text{ 之间}) \text{ 时,}$$

$$P_{\text{最大值}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-\frac{1}{25}) \times 10 - 2^2}{4 \times (-\frac{1}{25})} = 35$$

即出厂一张边长为 25cm 的薄板，所获得的利润最大，最大利润为 35 元

【注：边长的取值范围不作为扣分点】

【点评】本题是一次函数、二次函数的用，①求表达式，②求极值。一次函数求极值是根据 y 随 x 的增大而增大还是缩小；二次函数的极值分为两部分：顶点极值和非顶点极值。是每次中考都要考查的重点内容。教学时要多加注意。难度中等。

NO.4 图形与几何 (1)

1、选择题：

- (1) B; (2) D; (3) C;
 (4) C; (5) C; (6) C.

2、填充题：

- (1) 68; (2) 65; (3) 27;
 (4) $\angle A = 2\angle E$ (利用外角)
 (5) $\frac{b}{\sin \theta}$; (6) 40; (7) 60° ;
 (8) $\sqrt{2}$; (9) 菱形; (10) $\sqrt{5} \pm 2$.

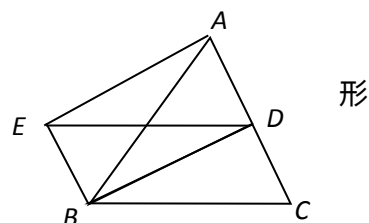
3、解答题：

- (1) $\because AE \parallel DB, AE = DB$, 则四边形 ADBE 为平行四边

$\because AB = BC, BD$ 是 AC 边上的中线

$\therefore BD \perp AC$

\therefore 四边形 ADBE 为矩形



- (2) 证：联结 BG、BH，BD 交 AC 于 O

E 是 AB 中点，AG = GH

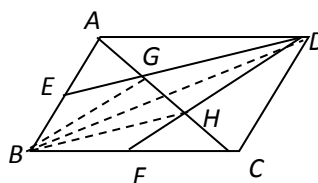
$\therefore EG$ 是 $\triangle ABH$ 的中位线， $BH \parallel DE$,

同理： $BG \parallel DF$

则四边形 BHDE 为平行四边形，

$\therefore BO = DO, OG = OH, \therefore AG = CH, \therefore AO = OC$

\therefore 四边形 ABCD 是平行四边形



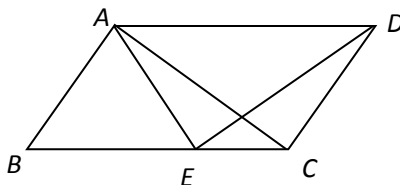
(3) 解题思路：

①先证：

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle B = \angle AEB \\ BC = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAD$$

$$\angle AED = \angle BAC = 90^\circ$$



(b) 作 $AH \perp BC$ 于 H . 设 $BH = HE = x$

$$6^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$\text{解得：} x = \frac{18}{5}$$

$$\therefore EC = \frac{14}{5}$$

(4) 解题思路：

① \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD = 5, AD = BC = 8,$$

$$\therefore A \parallel CD, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC$$

$\because \angle C, \angle D$ 的平分线分别交 AD, BC 与点 E, F ,

$$\therefore \angle ADF = \angle FDC \therefore \angle DFC = \angle FDC, \therefore FC = DC = 5$$

同理可证： $DE = DC = 5 \therefore BF = AE = 3$

$$\because AF \perp BC, AD \parallel BC \therefore \angle AFB = \angle DAF = 90^\circ$$

$Rt\triangle ABF$ 中， $AF = 4$

$$Rt\triangle AFD \text{ 中，} \tan \angle ADF = \frac{AF}{AD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(b)联结 EF ,

$Rt\triangle AFD$ 中, $AF=4$, $AD=8$

$$AF^2 + AD^2 = FD^2 \quad DF = 4\sqrt{5}$$

$\therefore FC=DE=5$, 又 $\therefore AD \parallel BC$

\therefore 四边形 $EFCD$ 是平行四边形

又 $\therefore FC=DC$, \therefore 平行四边形 $EFCD$ 是菱形

$$\therefore S_{\text{菱形}EFCD} = \frac{1}{2} CE \cdot FD = AF \cdot CF ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} CE = 5 \times 4 \quad \therefore CE = 2\sqrt{5}$$

(5) (a) 作 $EM \perp DC$ 于 M , $HN \perp BC$ 于 N

先证 : $\triangle EMG \cong \triangle HNF$, 可得 $EG=HF$

(a) 解 : 作 $AM \parallel HF$, $AN \parallel EG$ 分别交 BC 、 CN 于 M 、 N . 则可得 $AM=HF$, $AN=EG$,

且 $\angle MAN = \angle FPG = 45^\circ$

将 $\triangle AND$ 绕点 A 旋转至 $\triangle ABK$, 可得 K 、 B 、 C 共线, $\triangle AKM \cong \triangle ANM$

$$BM = \frac{1}{2} = MC. \quad \text{设 } DN=x, NC=1-x, MN=\frac{1}{2}+x$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABM \text{ 中 } \left(\frac{1}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-x)^2$$

$$\text{得 } x = \frac{1}{3} \quad \therefore EG = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

(6) 解 : (a) 作 $EM \parallel AB$ 交 BC 于 M

$EN \parallel DC$ 交 BC 于 N 则 $\angle EMN = \angle B$

$$\angle ENM = \angle C \quad \therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EMN + \angle ENM = 90^\circ \therefore \angle MEN = 90^\circ$$

$$\therefore BM = AE, CN = DE, AE = DE \therefore BM = NC$$

$$MN = BC - AD = 4 \therefore BF = FC \therefore MF = FN$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} MN = 2$$

(b) 作 $AG \perp BC$ 于 G , $DH \perp BC$ 于 H , 则 $GH = AD = 3$

$\because \angle B = 30^\circ, \angle C = 60^\circ$ 设 $AG = DH = x$

则 $BG = \sqrt{3}x$, $HC = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $BG + GC = BC - AD = 4$

$$BG = GC = BC - AD = 4 \quad \therefore \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}x = 4$$

$$x = \sqrt{3} \quad \therefore S = \frac{1}{2} (7 + 3) \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

(7) ①解: $\because PE \parallel BC$,

$$\therefore \angle AEP = \angle ACB, \angle EPD = \angle Q.$$

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle A = \angle ACB = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle A = \angle AEP.$$

$$\therefore AP = PE.$$

$$\text{又} \because AP = CQ,$$

$$\therefore PE = CQ.$$

在 $\triangle EDP$ 和 $\triangle CDQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle EDP = \angle CDQ \\ \angle EPD = \angle Q \\ PE = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDP \cong \triangle CDQ. (A.A.S.)$$

$$\therefore DE = DC.$$

② $\because AP = PE, PF \perp AC$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AE.$$

$$\because DE = DC, \text{ 且 } DE + DC = CE,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CE.$$

$$\therefore DF = EF + DE$$

$$= \frac{1}{2} AE + \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2} (AE + CE)$$

$$= \frac{1}{2} AC.$$

(8) 解① $PM = PN$

过点 M 作 $MD \perp AC$ 交 AB 于点 D

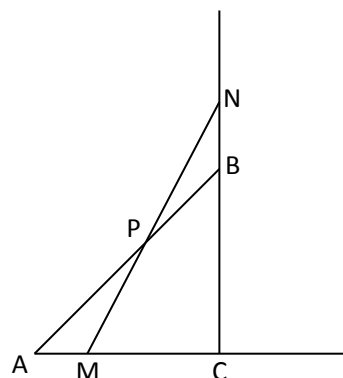
$$\because \angle ACB = 90^\circ \quad AC = BC = 4 \quad \therefore \angle A = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ADM = 45^\circ \quad \therefore AM = MD$$

$$\therefore AM = BN \quad \therefore DM = BN$$

$$\because \angle ACB = \angle DMA = 90^\circ \quad \therefore DM \parallel NC \quad \therefore \angle DMP = \angle BNP \quad \angle MDP = \angle NBP$$

$$\therefore \triangle DMP \cong \triangle BNP \quad (\text{ASA}) \quad \therefore PM = PN$$



②若点 M 在线段 AC 上, 由 (1) 得: $AB = 4\sqrt{2}$, $\triangle ADM$ 是等腰直角三角形

$$\therefore AM = x \quad \therefore AD = \sqrt{2}AM = \sqrt{2}x \quad \because \triangle DMP \cong \triangle BNP \quad BP = y$$

$$\therefore DP = BP = y \quad \therefore \sqrt{2}x + y + y = 4\sqrt{2} \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2} \quad 1,$$

定义域为 $0 < x \leq 4$; $1,$

若点 M 在线段 AC 的延长线上, 如图 5,

过点 M 作 $MD \perp AC$ 交 AB 延长线于点 K

同样可得: $PK = BP = y \quad AK = \sqrt{2}x$ 又 $AB = 4\sqrt{2}$

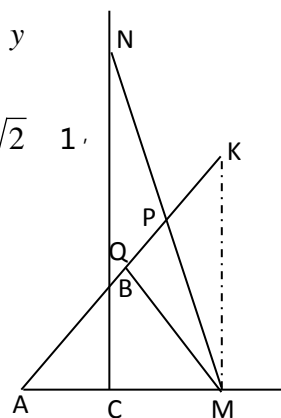


图 5

$$\therefore y + y + 4\sqrt{2} = \sqrt{2}x \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 2\sqrt{2} \quad 1, \quad \text{定义域为 } x > 4. \quad 1,$$

③线段 PQ 的长能确定且 $PQ = 2\sqrt{2}$. 1,

若点 M 在线段 AC 上, 如图 4 $\triangle ADM$ 是等腰直角三角形 $\therefore MQ \perp AB$

$$\therefore AQ = QD \quad \text{又 } AQ + QD + DP + PB = AB \quad DP = BP$$

$$\therefore QD + DP = \frac{1}{2}AB \quad 1, \quad QD + DP = PQ \quad AB = 4\sqrt{2} \quad \therefore PQ = 2\sqrt{2} \quad 1,$$

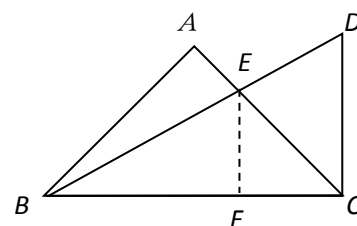
若点 M 在线段 AC 的延长线上, 如图 5 $PQ = KQ - PK$

$$\triangle AMK \text{ 是等腰直角三角形 } MQ \perp AB \quad \therefore KQ = \frac{1}{2}AK$$

$$AK = \sqrt{2}x \quad PK = y \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 2\sqrt{2} \quad \therefore PQ = 2\sqrt{2} \quad 1,$$

\therefore 线段 PQ 的长能确定且 $PQ = 2\sqrt{2}$.

(9) 解析: 例 5、与习题 (9) \ (10) 都是用两把三角板重叠而成。这写题目要求我们综合利用解直角三角形, 直角三角形的性质和三角函数的灵活运用来解答。



题 9 图

解: 如图: 设 AC 与 BD 相较于点 E.

过 E 作 $EF \perp BC$ 垂足为 F.

$$\text{设 } EF = x, \therefore \cos \angle DBC = \frac{BF}{EF}, \therefore BF = EF \cos 30^\circ = \sqrt{3}x.$$

同理 $CF = EF \cos 45^\circ = x$.

由 $BF + CF = BC$, 得 $\sqrt{3}x + x = 6$.

$$\therefore x = 3(\sqrt{3} - 1).$$

$$\therefore S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} \times 3(\sqrt{3} - 1) = 9\sqrt{3} - 9.$$

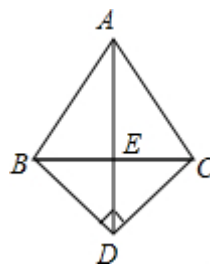
(10) 解析:

此题不给图形, 往往藏有玄机, 在自己画图的过程中要仔细考虑: 这个图能不能有不同的画法? 要不要分类讨论.

所以, 首先根据题意画出图形, 根据 $AB = AC$, $DB = DC$ 可证出点 A、D 都在 BC 的垂直平分线上, 即 AD 是线段 CB 的垂直平分线, 所以 $DE = \frac{1}{2} BC$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$, 再由条件 $AB = CB = 1$, 可以知道计算出 AD 的长.

答案:

解: ①当 D 与 A 在 BC 两侧, 如右图:



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = AC,$$

\therefore 点 A 在 BC 的垂直平分线上(到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上),

$\because \triangle DBC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形,

$$\therefore DB = DC,$$

\therefore 点 D 也在 BC 的垂直平分线上,

$\therefore AD$ 是线段 CB 的垂直平分线,

$$\therefore AD \perp CB,$$

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2}, \quad AE = AB \cdot \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AD = AE + DE = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } D \text{ 与 } A \text{ 在 } BC \text{ 同侧, } AD = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\text{综上所述: } AD = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad AD = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

NO.5 图形与几何 (2)

1、选择题：

(1)D; (2)B; (3)B; (4) A; (5) D; (6) C .

2、填充题：

$$(1) \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad (2) \frac{bc}{b+c} \quad (3) (1+2\sqrt{3}, 2);$$

$$(4) 2\sqrt{2} \text{ 或 } 4\sqrt{2}; \quad (5) 6; \quad (6) 14;$$

$$(7) \frac{9}{4} \text{ 或 } \frac{9}{2}, \quad (8) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 m \quad (9) 1 \text{ 或 } 2\sqrt{3}-1;$$

$$(10) (-\sqrt{3}, 0).$$

3、解答题：

$$(1) \vec{x} = -2\vec{a} + 2\vec{b}, \text{ 作图略。}$$

(2) 解：

$$\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{c} \therefore a \parallel c.$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} \therefore b \parallel c$$

$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

(3) 证明 \because 四边形 ABCD 是平行四边形

$$\therefore AB \parallel CD \quad AD \parallel BC$$

$$\therefore \frac{PE}{PF} = \frac{PB}{PD} \quad \frac{PN}{PM} = \frac{PB}{PD}$$

$$\therefore \frac{PE}{PF} = \frac{PN}{PM}$$

$$\text{即 } PE \cdot PM = PF \cdot PN$$

$$(4) \text{ 解: } \because AC=3, BC=3\sqrt{5}, BE=5, DC=\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{DC}{BE} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{BE} \quad \therefore Rt\triangle ACD \sim Rt\triangle CBE$$

$$\therefore \angle ACE = \angle EBC$$

$$\therefore \angle EBC + \angle ECB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ECB + \angle ACE = 90^\circ \quad \therefore \text{即 } AC \perp BC$$

(5) 解: $\because AC \parallel BE$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDE$$

$$\therefore \left(\frac{AD}{BD}\right)^2 = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDE}}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\because AB = 10 \quad \therefore AD = 4$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DBC \quad \angle BAC = \angle BAC$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

$$\therefore \frac{AC}{10} = \frac{4}{AC}$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{10}$$

(6) 证明 (a) $\because \angle BAE = \angle CAE$

$$\angle AFB = \angle AEC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACE$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{BF}{EC}$$

$$(b) \because \triangle ABF \sim \triangle ACE \quad \therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AEC}} = \left(\frac{AF}{AE}\right)^2$$

$$\because S_{\triangle ABF} = 4, S_{\triangle AEC} = 9, \quad \therefore \frac{AF}{AE} = \frac{2}{3} \text{ 即 } \frac{AF}{EF} = 2$$

$$\because \angle AFB = \angle AEC = 90^\circ \quad \therefore BF \parallel EC$$

$$\therefore \frac{BF}{EC} = \frac{PB}{PE} \quad \therefore \frac{AF}{AE} = \frac{BF}{EC} \quad \therefore \frac{AF}{AE} = \frac{PB}{PE}$$

$$\therefore AP \parallel BF \quad \therefore BF \parallel EC$$

$$\therefore EC \parallel AP$$

$$\therefore \frac{AP}{EC} = \frac{AF}{EF} = 2$$

$$(7) \quad (a) \frac{3}{2}$$

$$(b) \frac{m}{2}$$

作 $EH \parallel AB$ 交 BG 于点 H ,

$$\therefore \frac{AB}{EH} = \frac{AF}{EF} = m, AB = mEH$$

$$\because AB = CD, \therefore CD = mEH$$

$$EH \parallel AB \parallel CD$$

$$\therefore \frac{CG}{EH} = \frac{BC}{BE} = 2, \therefore CG = 2EH$$

$$\therefore \frac{CD}{CG} = \frac{mEH}{2EH} = \frac{m}{2}.$$

(c) 作 $EH \parallel AB$ 交 BD 的延长线于点 H

$$EH \parallel AB \parallel CD$$

$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{CD}{HE} = b$$

$$\therefore HE = \frac{CD}{b}$$

$$EH \parallel AB$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{AB}{HE}$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{AB}{\frac{CD}{b}}$$

$$\therefore \frac{AF}{EF} = ab$$

四、综合题：

(1) 解析:(a)当 $\angle BPC = \angle A$ 时,

$\angle A + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ$, 而 $\angle APB + \angle BPC + \angle DPC = 180^\circ$, 因此 $\angle ABP = \angle DPC$,

此时三角形 APB 与三角形 DPC 相似,那么可得出关于 AP,PD,AB,CD 的比例关系式,AB,CD 的值题中已经告诉,可以先用 AP 表示出 PD,然后代入上面得出的比例关系式中求出 AP 的长.

(b)与(a)的方法类似,只不过把 DC 换成了 DQ,那么只要用 $DC + CQ$ 就能表示出 DQ 了.然后按得出的关于 AB,AP,PD,DQ 的比例关系式,得出 x,y 的函数关系式.

(b)和(a)的方法类似,但是要多一步,要先通过平行得出三角形 PDQ 和 CEQ 相似,根据 CE 的长,用 AP 表示出 PD,然后根据 PD,DQ,QC,CE 的比例关系用 AP 表示出 DQ,然后按(a)的步骤进行求解即可.

解:(a) $\because ABCD$ 是梯形, $AD \parallel BC$, $AB = DC$.

$$\therefore \angle A = \angle D$$

$$\therefore \angle ABP + \angle APB + \angle A = 180^\circ, \quad \angle APB + \angle DPC + \angle BPC = 180^\circ,$$

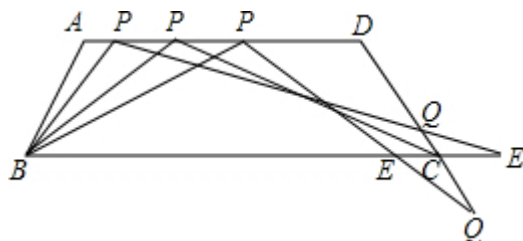
$$\angle BPC = \angle A$$

$$\therefore \angle ABP = \angle DPC,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle DPC$$

$$\therefore \frac{AP}{CD} = \frac{AB}{PD}, \text{即: } \frac{AP}{2} = \frac{2}{5-AP}$$

计算得出: $AP=1$ 或 $AP=4$.



(b)①由(a)可以知道: $\triangle ABP \sim \triangle DPQ$

$$\therefore \frac{AP}{DQ} = \frac{AB}{PD}, \text{即: } \frac{x}{2+y} = \frac{2}{5-x},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2 \quad (1 < x < 4)$$

②当 $CE=1$ 时,

$$\therefore \triangle PDQ \sim \triangle ECQ,$$

$$\therefore \frac{CE}{PD} = \frac{CQ}{DQ},$$

当 Q 在边 DC 的延长线上时,

$$\frac{1}{5-x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2}{(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2) + 2} \quad x=2.$$

当 Q 在边上时,

$$\triangle ABP \sim \triangle DPQ$$

$$\frac{x}{DQ} = \frac{2}{5-x}, DQ = \frac{x(5-x)}{2}$$

$$AD \parallel BC \text{ 得 } \frac{5-x}{1} = \frac{DQ}{2-DQ}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5} (\text{舍}), \quad x_2 = 3 - \sqrt{5}.$$

综上所述, $AP=2$ 或 $AP=3-\sqrt{5}$.

$$\frac{1}{5-x} = \frac{y}{y+2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{5+x} = \frac{y}{y-2},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2,$$

计算得出: $AP = 2$ 或 $3 - \sqrt{5}$ (舍去).

(2) 解:(a) ① $\because \angle APQ + \angle CPQ = \angle B + \angle BAP$, $\angle APQ = \angle ABC$,

$$\therefore \angle BAP = \angle CQP.$$

又 $\because AB = AC$, $\therefore \angle B = \angle C$.

$$\therefore \triangle QCP \sim \triangle ABP.$$

$$\therefore \frac{CQ}{BP} = \frac{CP}{AB}.$$

$$\because AB = AC = 5, BC = 8, BP = 6, CP = 8 - 6 = 2,$$

$$\therefore \frac{CQ}{6} = \frac{2}{5}, CQ = \frac{12}{5}.$$

②若点 P 在线段 CB 上, 由(1)知 $\frac{CQ}{BP} = \frac{CP}{AB}$.

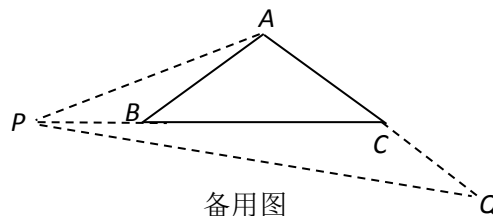
$$\because BP = x, BC = 8, \therefore CP = BC - BP = 8 - x,$$

$$\text{又} \because CQ = y, AB = 5, \therefore \frac{y}{x} = \frac{8-x}{5}, \text{即 } y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x.$$

故所求的函数关系式为 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$,

($0 < x < 8$).

若点 P 在线段 CB 的延长线上, 如图 11.



$$\therefore \angle APQ = \angle APB + \angle CPQ,$$

$$\angle ABC = \angle APB + \angle PAB,$$

$$\angle APQ = \angle ABC, \therefore \angle CPQ = \angle PAB.$$

$$\text{又} \because \angle ABP = 180^\circ - \angle ABC,$$

$$\angle PCQ = 180^\circ - \angle ACB, \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle PCQ. \therefore \triangle QCP \sim \triangle PBA. \therefore \frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{PC}.$$

$$\because BP = x, CP = BC + BP = 8 + x, AB = 5, CQ = y,$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{8+x}, \text{即 } y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \quad (x > 0).$$

$$(b) \text{ 当点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 上, } BP = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \text{ 或 } BP = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{当点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 的延长线上, 则点 } Q \text{ 在线段 } DC \text{ 的延长线上, } BP = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{当点 } P \text{ 在线段 } CB \text{ 的延长线上, 则点 } Q \text{ 在线段 } DC \text{ 的延长线上, } BP = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}.$$

解: ①在 $\triangle MBC$ 中, $\angle MCB = 90^\circ$, $BC = 2$,

$$\text{又} \because M \text{ 是边 } AC \text{ 的中点, } \therefore AM = MC = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore MB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

又 $CH \perp BM$ 于 H , 则 $\angle MHC = 90^\circ$, $\therefore \angle MCH = \angle MBC$,

$$\therefore \sin \angle MCH = \frac{CM}{BM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{②在 } \triangle MHC \text{ 中, } MH = CM \cdot \sin \angle MCH = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore AM^2 = MC^2 = MH \cdot MB, \text{ 即 } \frac{MA}{MH} = \frac{MB}{MA},$$

又 $\because \angle AMH = \angle BMA$, $\therefore \triangle AMH \sim \triangle BMA$,

$$\therefore \angle ABM = \angle CAH.$$

(c) **解析**：对于求等腰三角形的问题，有一种方法：利用余弦值立方程求解。关键词：找到两边一角。

$$\text{设 } AD = x, \text{ 由 } \triangle AMH \sim \triangle BMA \text{ 得 } \frac{AH}{AB} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AH}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore AH = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{由 } \angle ABM = \angle CAH, \text{ 得 } \angle CBM = \angle BAH, \text{ 所以 } \cos \angle BAH = \cos \angle CBM = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{当 } AD = AH \text{ 时, } AD = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{当 } AD = DH \text{ 时, } \cos \angle BAH = \frac{\frac{1}{2}AH}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{5x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \therefore AD = x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{当 } AH = DH \text{ 时, } \cos \angle BAH = \frac{\frac{1}{2}AD}{AH} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2\sqrt{10}}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, AD = x = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } AD \text{ 的值是: } \frac{2\sqrt{10}}{5}, \frac{8\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4) (a) $\because CP$ 过重心, $\therefore CP$ 为 $\triangle ABC$ 的中线

$$\therefore CP = \frac{1}{2}AB = AP. \therefore \angle A = \angle ACP.$$

$$\text{又 } \angle ACP + \angle DCB = 90^\circ, \angle CBD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle A. \text{ 又 } \angle BDC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ABC.$$

(b) $\because BC = 2, \cot A = 2, \therefore AC = 4.$

\therefore 过点 P 作 $PE \perp AC$, E 为垂足.

$$\text{则 } AP = \sqrt{5}t, PE = t, AE = 2t,$$

$$EC = 4 - 2t, PC = \sqrt{t^2 + (4 - 2t)^2}$$

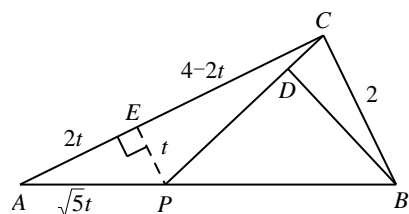
由 $\angle PCE = \angle CBD$ 得 $Rt\triangle CPE \sim Rt\triangle BCD$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CPE}} = \left(\frac{BC}{PC}\right)^2.$$

$$\text{即 } \frac{y}{\frac{1}{2}(4-2t)t} = \frac{4}{t^2 + (4-2t)^2},$$

$$\text{化简, 得 } y = \frac{8t - 4t^2}{5t^2 - 16t + 16} (0 < t < 2)$$

(c) ①当 $PC = PB$ 时, 有



$$\sqrt{t^2 + (4-2t)^2} = 2\sqrt{10} - \sqrt{5}t ,$$

解之, 得 $t=1$.

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } y = \frac{8 \times 1 - 4 \times 1^2}{5 \times 1^2 - 16 \times 1 + 16} = \frac{4}{5} \text{ (平方厘米).}$$

② 当 $PC=BC$ 时, 有

$$\sqrt{t^2 + (4-2t)^2} = 2 ,$$

解之, 得 $t_1 = \frac{6}{5}, t_2 = 2$ (不合题意, 舍去)

$$\text{当 } t = \frac{6}{5} \text{ 时, } y = \frac{8 \times \frac{6}{5} - 4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2}{5 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 16 \times \frac{6}{5} + 16} = \frac{24}{25} \text{ (平方厘米).}$$

综上所述, 当 $PC=PB$ 时, $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{4}{5}$ 平方厘米; 当 $PC=BC$ 时, $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{24}{25}$ 平方厘米.

(5) 解: (a) 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\because AB = AC = 5, BC = 6 ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} BC = 3.$$

$$\text{则在 } Rt\triangle ABH \text{ 中, } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 4 ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 12.$$

(b) 令此时正方形的边长为 a ,

$$\text{则 } \frac{a}{6} = \frac{4-a}{4} ,$$

$$\text{解得 } a = \frac{12}{5}.$$

(c) 当 $0 < x \leq 2$ 时,

$$y = \left(\frac{6}{5}x\right)^2 = \frac{36}{25}x^2.$$

当 $2 < x < 5$ 时,

$$y = \frac{6}{5}x \cdot \frac{4}{5}(5-x) = \frac{24}{5}x - \frac{24}{25}x^2.$$

$$(d) AD = \frac{125}{73}, \frac{25}{11}, \frac{20}{7}.$$

解: (a) $OP = 6-t$, $OQ = t + \frac{2}{3}$.

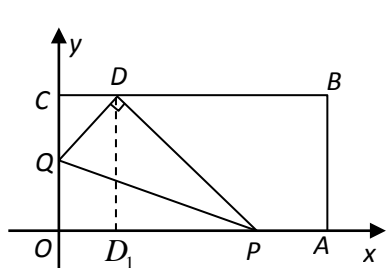


图 1

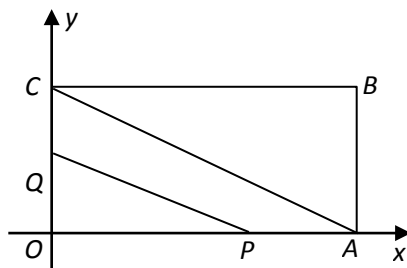


图 2

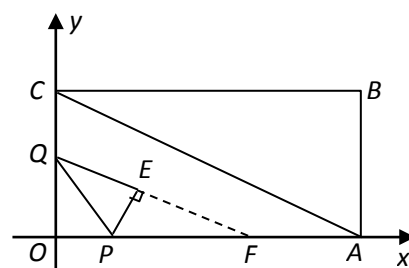


图 3

(b) 当 $t=1$ 时, 过 D 点作 $DD_1 \perp OA$, 交 OA 于 D_1 , 如图 1,

$$\text{则 } DQ = QO = \frac{5}{3}, \quad QC = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CD = 1, \therefore D(1,3).$$

(c) ① PQ 能与 AC 平行.

$$\text{若 } PQ \parallel AC, \text{ 如图 2, 则 } \frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OC},$$

$$\text{即 } \frac{6-t}{t+\frac{2}{3}} = \frac{6}{3}, \therefore t = \frac{14}{9}, \text{ 而 } 0 \leq t \leq \frac{7}{3},$$

$$\therefore t = \frac{14}{9}.$$

② PE 不能与 AC 垂直.

若 $PE \perp AC$, 延长 QE 交 OA 于 F , 如图 3,

$$\text{则 } \frac{QF}{AC} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{QF}{3\sqrt{5}} = \frac{t+\frac{2}{3}}{3}.$$

$$\therefore QF = \sqrt{5} \left(t + \frac{2}{3} \right).$$

$$\therefore EF = QF - QE = QF - OQ$$

$$= \sqrt{5} \left(t + \frac{2}{3} \right) - \left(t + \frac{2}{3} \right)$$

$$= (\sqrt{5} - 1)t + \frac{2}{3}(\sqrt{5} - 1) .$$

$$\text{又} \because \text{Rt} \triangle EPF \sim \text{Rt} \triangle OCA , \therefore \frac{PE}{EF} = \frac{OC}{OA} ,$$

$$\therefore \frac{6-t}{(\sqrt{5}-1)\left(t+\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{6} ,$$

$$\therefore t \approx 3.45 , \text{ 而 } 0 \leq t \leq \frac{7}{3} ,$$

$\therefore t$ 不存在 .

(7) 解析：用角平分线、平行线构建等腰三角形，利用平行线分线段成比例、相似三角形的性质解题。在解题过程中运用类比的思想。

解：① $\because E, F$ 分别是 AB, AC 的中点， $x = \frac{1}{3} EF$ ，

$$\therefore EF \parallel BC, \text{ 且 } EF = \frac{1}{2} BC ,$$

$$\therefore EP = \frac{1}{3} EF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC = 1$$

$$\because EF \parallel BC \therefore \triangle EDP \sim \triangle CDB ,$$

$$\therefore S_{\triangle DPE} : S_{\triangle DBC} = \left(\frac{EP}{BC} \right)^2 = \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \frac{1}{36}$$

② 延长 BQ 交 EF 于点 G ，

$$\because CQ = \frac{1}{2} CE \quad \therefore CQ = QE,$$

$$\because EF \parallel BC \therefore \angle CEG = \angle ECB$$

$$\text{又} \because \angle BQC = \angle EQG$$

$$\therefore \triangle QEG \cong \triangle QCB$$

$$\therefore EG = BC = 6, \angle PGQ = \angle CBQ$$

$$\text{又} \because BQ \text{ 平分 } \angle CBD, \angle CBQ = \angle PBQ$$

$$\therefore \angle PGB = \angle PBQ, \therefore PB = PG$$

$$\therefore EG = PE + PG = PE + PB = x + y = 6$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为: } y = 6 - x. (0 < x < 6)$$

③ (i) 延长 BQ 交 EF 于点 H ,

$$\because EF \parallel BC \quad \therefore \triangle QEH \sim \triangle QCB \quad \therefore \frac{BC}{EH} = \frac{CQ}{QE}$$

$$\because CQ = \frac{1}{3} CE \quad \therefore EH = 2BC = 12,$$

$$\angle PHQ = \angle CBQ$$

$$\text{又} \because BQ \text{ 平分 } \angle CBD, \angle CBQ = \angle PBQ$$

$$\therefore \angle PHB = \angle PBH, \therefore PB = PH$$

$$\therefore EH = PE + PH = PE + PB = x + y = 2BC = 12$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为: } y = 12 - x. (0 < x < 12)$$

$$(ii) \text{ 当 } CQ = \frac{1}{n} CE (n \text{ 为不小于 } 2 \text{ 的常数}) \text{ 时,}$$

$$y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为: } y = 6(n-1) - x (0 < x < n-1)$$

NO.6 图形与几何 (3)

1、选择题:

(1) B; (2) A; (3) A; (4) C; (5) B; (6) C.

2、填充题:

- (1) 八 ; (2) $0 \leq d < 1$; (3) $4 \pm \sqrt{7}$;
 (4) 18 ; (5) $\frac{3}{2} \leq d \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (6) $\sqrt{41}$ 或 5

3、解答题：

(1) 解：(a) 点 A 是弧 MN 的中点，

$$\text{所以 } \angle AOM = \angle AON = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ ,$$

在 $\triangle AOC$ 中， $\angle AOC + \angle ACO + \angle CAO = 180^\circ$ ，又 $\angle ACO = 2\angle CAO$ 。

$$\text{所以 } \angle CAO = \frac{1}{3}(180^\circ - 90^\circ) = 30^\circ .$$

(b) 作 $OH \perp AB$ ，垂足为 H ，由垂径定理得 $AB = 2AH$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOH$ 中， $OA = \sqrt{3}$ ， $\angle CAO = 30^\circ$ ， $\angle AHO = 90^\circ$ ，

$$\text{则 } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{3}{2}$$

所以 $AB = 3$ 。

(2) 解：(a) $\because BD$ 平分 $\angle CBA$ ， $\therefore \angle CBD = \angle DBA$

$\because \angle DAC$ 与 $\angle CBD$ 都是弧 CD 所对的圆周角， $\therefore \angle DAC = \angle CBD$

$\therefore \angle DAC = \angle DBA$

(b) $\because AB$ 为直径， $\therefore \angle ADB = 90^\circ$

又 $\because DE \perp AB$ 于点 E ， $\therefore \angle DEB = 90^\circ$ $\therefore \angle ADE + \angle EDB = \angle ABD + \angle EDB = 90^\circ$

$\therefore \angle ADE = \angle ABD = \angle DAP$

$\therefore PD = PA$

又 $\because \angle DFA + \angle DAC = \angle ADE + \angle PDF = 90^\circ$ 且 $\angle ADE = \angle DAC$

$\therefore \angle PDF = \angle PFD$

$\therefore PD = PF$ $\therefore PA = PF$ 即 P 是线段 AF 的中点

$$(c) \because \angle DAF = \angle DBA, \angle ADB = \angle FDA = 90^\circ \therefore \triangle FDA \sim \triangle ADB$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{AB}$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } \tan \angle ABD = \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{AB} = \frac{\frac{15}{2}}{10} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \tan \angle ABF = \frac{3}{4}$$

(3) 解:(a) 由圆的性质知 $\angle MCD = \angle DAB$ 、 $\angle DCA = \angle DBA$ ，“圆的内接四边形外角等于它的内对角”

而 $\angle MCD = \angle DCA$ ，所以 $\angle DBA = \angle DAB$ ，故 $\triangle ABD$ 为等腰三角形。

$$(b) \because \angle DBA = \angle DAB$$

$$\therefore \text{弧 } AD = \text{弧 } BD$$

$$\text{又} \because BC = AF$$

$$\therefore \text{弧 } BC = \text{弧 } AF, \angle CDB = \angle FDA$$

$$\therefore \text{弧 } CD = \text{弧 } DF$$

$$\therefore CD = DF$$

再由“圆的内接四边形外角等于它的内对角”知

$$\angle AFE = \angle DBA = \angle DCA \text{ ①}, \angle FAE = \angle BDE$$

$$\therefore \angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = \angle FDA + \angle BDA = \angle BDE = \angle FAE \text{ ②}$$

$$\text{由①②得 } \triangle DCA \sim \triangle FAE$$

$$\therefore AC : FE = CD : AF$$

$$\therefore AC \cdot AF = CD \cdot FE$$

而 $CD = DF$ ，

$$\therefore AC \cdot AF = DF \cdot FE$$

(4) 解:(a) 60,60;

(b) $\because CM \parallel BP, \therefore \angle BPM + \angle M = 180^\circ, \angle PCM = \angle BPC = 60^\circ$.

$\therefore \angle M = 180^\circ - \angle BPM = 180^\circ - (\angle APC + \angle BPC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\therefore \angle M = \angle BPC = 60^\circ$.

(c) $\because \triangle ACM \cong \triangle BCP, \therefore CM = CP, AM = BP$.

又 $\angle M = 60^\circ, \therefore \triangle PCM$ 为等边三角形.

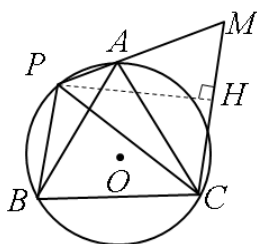
$\therefore CM = CP = PM = 1 + 2 = 3$.

作 $PH \perp CM$ 于 H .

在 $Rt\triangle PMH$ 中, $\angle MPH = 30^\circ$.

$\therefore PH = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{梯形}PBCM} = \frac{1}{2}(PB + CM) \times PH = \frac{1}{2}(2 + 3) \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$.



(5) 解:(a) $\because AE \perp EF, EF \parallel BC, \therefore AD \perp BC$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中, $\because BD = CD, \angle ADB = \angle ADC, AD = AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$. (或者: 又 $\because BD = CD, \therefore AE$ 是 BC 的中垂线.)

$\therefore AB = AC$.

(b) 连 $BO, \because AD$ 是 BC 的中垂线, $\therefore BO = CO$. (或者: 证全等也可得到 $BO = CO$.)

又 $AO = CO, \therefore AO = BO = CO$.

\therefore 点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心.

(c) 解法 1: $\because \angle ABE = \angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ, \therefore \angle ABD = \angle AEB.$$

$$\text{又} \because \angle BAD = \angle EAB, \therefore \triangle ABD \sim \triangle AEB. \therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中}, \because AB=5, BD=1, 2BC=3, \therefore AD=4.$$

$$\therefore AE = \frac{25}{4}$$

$$\text{解法 2: } \because AO = BO, \therefore \angle ABO = \angle BAO. \because \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle OBE = \angle BAO + \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB, \therefore OB = OE.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中}, \because AB=5, BD=1, 2BC=3,$$

$$\therefore AD=4. \text{ 设 } OB = x, \text{ 则 } OD = 4 - x,$$

$$\text{由 } 3^2 + (4-x)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{25}{8}$$

$$\therefore AE = 2OB = \frac{25}{4}.$$

4、综合题：

(1) 解 (a) 联结 OE $\therefore \angle BOE = \angle EOD$

$$\because OD \parallel BF \quad \therefore \angle DOE = \angle BEO$$

$$\because OB = OE \quad \therefore \angle OBE = \angle OEB$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB = \angle BOE = 60^\circ$$

$$\because \angle FCB = 90^\circ \therefore \angle F = 30^\circ$$

(b) 作 $OH \perp BE$, 垂足为 H ,

$$\because \angle DCO = \angle OHB = 90^\circ, OB = OD, \angle OBE = \angle COD$$

$$\therefore \triangle HBO \cong \triangle COD$$

$$\therefore CO = BH = x, BE = 2x,$$

$$\because OD \parallel BF \quad \therefore \frac{OD}{BF} = \frac{OC}{BC}$$

$$\therefore \frac{4}{2x+y} = \frac{x}{4+x} \quad \therefore y = \frac{4x+16-2x^2}{x} \quad (0 < x < 4)$$

$$(c) \because \angle COD = \angle OBE, \angle OBE = \angle OEB, \angle DOE = \angle OEB$$

$\therefore \angle COD = \angle DOE$, $\therefore C$ 关于直线 OD 的对称点为 P 在线段 OE 上

若 $\triangle PBE$ 为等腰三角形

$$\textcircled{1} \text{ 当 } PB=PE, \text{ 不合题意舍去; 当 } EB=EP \quad 2x=4-x, \quad x=\frac{4}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } BE=BP \quad \text{作 } BM \perp OE, \text{垂足为 } M,$$

易证 $\triangle BEM \sim \triangle DOC$

$$\therefore \frac{BE}{DO} = \frac{EM}{OC} \quad \therefore \frac{2x}{4} = \frac{\frac{4-x}{2}}{x}$$

$$\text{整理得: } x^2 + x - 4 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (\text{负数舍去})$$

综上所述: 当 OC 的长为 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 时, $\triangle PBE$ 为等腰三角形。

(2) 解: ①过点 P 作 $PD \perp AB$, 垂足为 D .

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ACB = \angle PDB = 90^\circ. \text{又} \because \angle ABC = \angle PBD, \therefore \triangle ACB \sim \triangle PDB.$$

$$\because AC=6\text{cm}, BC=8\text{cm}, \therefore AB=10\text{cm}. \because \text{点 } P \text{ 为 } BC \text{ 的中点}, \therefore BP=4\text{cm}.$$

$$\therefore \frac{PD}{AC} = \frac{PB}{AB}, \text{解得 } PD=2.4. \therefore t=1.2, V=2\text{cm/s}, PQ=2 \times 1.2=2.4,$$

$$\therefore PQ=PD, \text{即 } \odot P \text{ 与直线 } AB \text{ 相切}.$$

②当 $AP=AQ$ 时,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore CQ=CP=4\text{cm}, \therefore PQ=8\text{cm}. \therefore t_1=4 \text{ 秒}.$$

$$\text{当 } PA=PQ \text{ 时}, \because \angle ACB = 90^\circ, AC=6\text{cm}, CP=4\text{cm}, \therefore AP=2\sqrt{13} \text{ cm}.$$

$$\therefore PQ = 2\sqrt{13} \text{ cm.} \quad \therefore t_2 = \sqrt{13} \text{ 秒.}$$

当 $QA = QP$ 时, 点 Q 在线段 AP 的中垂线 QH 上, 垂足为 H .

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \cos \angle APC = \frac{PC}{AP} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{又} \because \cos \angle APC = \frac{PH}{QP} = \frac{\sqrt{13}}{QP}, \therefore \frac{\sqrt{13}}{QP} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \text{得 } PQ = \frac{13}{2}, \therefore t_3 = \frac{13}{4}$$

\therefore 当 $t = 4$ 秒或 $\sqrt{13}$ 秒或 $\frac{13}{4}$ 秒时, $\triangle AQP$ 是等腰三角形.

③ \because 点 P 在 $\odot O$ 内, $\therefore \odot P$ 与 $\odot O$ 只可能内切,

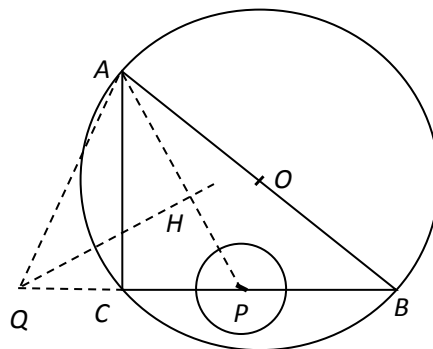
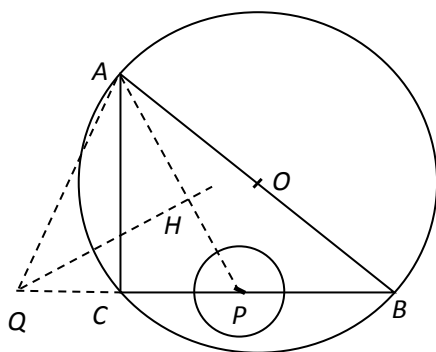
$$\because O \text{ 为 } AB \text{ 中点, } P \text{ 为 } BC \text{ 中点, } \therefore \text{圆心距 } OP = \frac{1}{2} AC = 3 \text{ cm.}$$

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\therefore \odot O$ 的半径为 5 cm , $\odot P$ 的半径为 PQ ,

$$\therefore |PQ - 5| = 3 \quad \text{当 } PQ - 5 = 3 \text{ 时, } PQ = 8 \text{ cm}, t = 4 \text{ 秒};$$

$$\text{当 } PQ - 5 = -3 \text{ 时, } PQ = 2 \text{ cm}, t = 1 \text{ 秒.}$$

\therefore 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 相切时, t 分别为 4 秒和 1 秒.



4、解：① \because $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\therefore CD$ 是斜边 AB 上的高, 即 $\angle ADC = 90^\circ$,

$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle BCD + \angle ACD = \angle A + \angle ACD.$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A = 30^\circ. \text{ 在 } \text{Rt} \triangle BDC \text{ 中, } CD = BC \cdot \cos \angle BCD = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle ADC \text{ 中, } AD = CD \cdot \cot \angle A = 3.$$

② $\because CF \perp DE, CD \perp AB,$

$$\therefore \angle CDG + \angle EDF = \angle CFD + \angle EDF, \text{ 即 } \angle CDG = \angle CFD.$$

$$\text{同理 } \angle ACD = \angle B, \triangle CDE \sim \triangle BFC, \therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF}, \text{ 即 } \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{DF + BD}.$$

$$\text{又} \because \text{在 Rt} \triangle BDC \text{ 中}, BD = BC \cdot \sin \angle BCD = 1,$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{y+1}, \therefore y = \frac{2\sqrt{3}-x}{x} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < 2\sqrt{3}\right).$$

$$\textcircled{3} \because \angle EGF = \angle CGD,$$

$$1^\circ \text{ 当 } \angle FEG = \angle CDG \text{ 时}, EF \parallel CD.$$

$$\therefore \frac{FD}{CE} = \frac{AD}{AC}, \text{ 即 } \frac{\frac{2\sqrt{3}-x}{x}}{\frac{x}{2\sqrt{3}}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{解得 } x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{39}}{3} \text{ (负值已舍)}.$$

$$2^\circ \text{ 当 } \angle FEG = \angle DCG \text{ 时},$$

$$\because \angle CDF = 90^\circ, CF \perp DE, \therefore \angle DCG = \angle EDF.$$

$$\text{又} \because \angle FEG = \angle DCG, \therefore \angle EDF = \angle FEG.$$

$$\therefore EF = FD.$$

又 $\because CF \perp DE, \therefore GE = GD$, 即 CF 是 DE 的垂直平分线. $\therefore CE = CD = \sqrt{3}$. 综上所述 CE 的长是 $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{39}}{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

(4) 解: (a) 作 $AG \perp BC$ 于 G , $BH \perp AC$ 于 H ,

$$\because AB = AC, AG \perp BC, \therefore BG = GC = 2,$$

$$\therefore AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

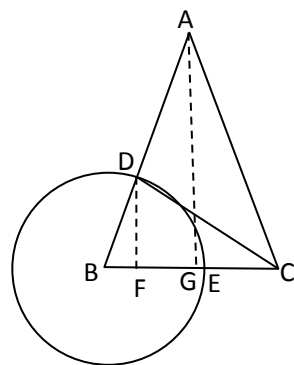
$$\text{又 } AG \cdot BC = BH \cdot AC,$$

$$\therefore BH = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{当 } \odot B \text{ 与直线 } AC \text{ 相切时}, x = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

(b) 作 $DF \perp BC$ 于 F ,

$$\text{则 } DF \parallel AG, \therefore \frac{BD}{AB} = \frac{DF}{AG},$$



$$\text{即 } \frac{x}{6} = \frac{DF}{4\sqrt{2}}, \therefore DF = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$$

$$\therefore CF = 4 - \frac{1}{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, $CD^2 = DF^2 + CF^2$

$$\therefore y = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{3}x\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{8}{3}x + 16}$$

$$(0 < x \leq 4).$$

(c) 解法一:

①作 $PQ \perp BC$ 于 Q .

$\because EF$ 是 $\odot B$ 、 $\odot P$ 的公共弦,

$\therefore BP \perp EF$, 且 $EG = FG$,

$\because \odot P$ 经过点 E , $\therefore PA = PE = PC$,

$\therefore AE \perp BC$,

又 $AC = AB$, $\therefore BE = EC = 2$

$\because PQ \parallel AE$, 且 P 是 AC 的中点

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}AE = 2\sqrt{2}, CP = 3,$$

$$\therefore CQ = 1, BQ = 3,$$

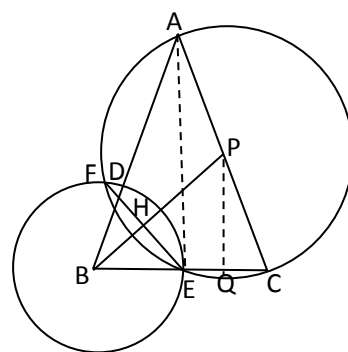
$$\therefore BP = \sqrt{17}$$

设 BP 交 EF 于点 H

设 $BH = m$, 由 $BE^2 - BH^2 = PE^2 - PH^2$,

$$2^2 - m^2 = 3^2 - (\sqrt{17} - m)^2 \text{ 解得 } m = \frac{4}{17}\sqrt{34},$$

$$\therefore EF = 2m = \frac{8}{17}\sqrt{34}$$



解法二:

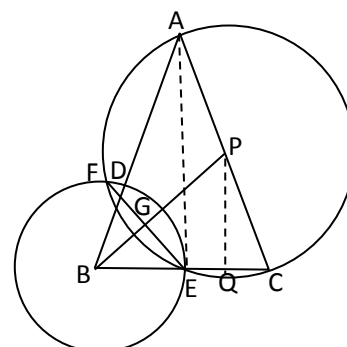
作 $PQ \perp BC$ 于 Q .

$\because EF$ 是 $\odot B$ 、 $\odot P$ 的公共弦,

$\therefore BP \perp EF$, 且 $EG = FG$,

$\because \odot P$ 经过点 E , $\therefore PA = PE = PC$,

$\therefore AE \perp BC$,



又 $AC = AB$, $\therefore BE = EC = 2$

$\therefore PQ \parallel AE$, 且 P 是 AC 的中点,

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} AE = 2\sqrt{2}, CP = 3,$$

$$\therefore CQ = 1, BQ = 3,$$

$$\therefore BP = \sqrt{17}$$

而 $Rt\triangle BQP \sim Rt\triangle BGE$,

$$\therefore \frac{EG}{PQ} = \frac{BE}{BP}, \text{ 即 } \frac{EG}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}, \therefore EG = \frac{4\sqrt{34}}{17}$$

$$\therefore \text{公共弦 } EF = \frac{8\sqrt{34}}{17}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当点 } E \text{ 和点 } C \text{ 重合时, } EF = \frac{16}{17}\sqrt{34}$$

(5) 解: (a) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $OC \perp AB$,

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle COB.$$

$$\therefore OC^2 = OA \cdot OB.$$

$$\therefore OA : OB = 3 : 1, C(0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore (\sqrt{3})^2 = 3OB \cdot OB.$$

$$\therefore OB = 1, \therefore OA = 3.$$

$$\therefore A(-3, 0), B(1, 0).$$

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$.

$$\text{则 } \begin{cases} 9a - 3b + c = 0, \\ a + b + c = 0, \\ c = \sqrt{3}. \end{cases} \text{ 解之, 得 } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ c = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{经过 } A、B、C \text{ 三点的抛物线的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}x + \sqrt{3}.$$

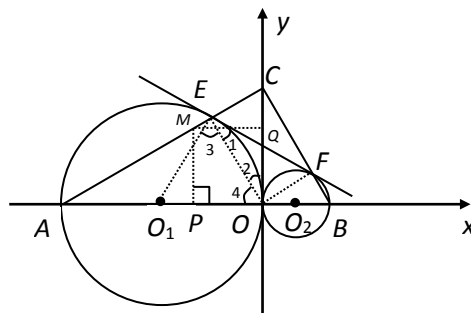
(b) EF 与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 都相切.

证明: 连结 O_1E 、 OE 、 OF .

$$\therefore \angle ECF = \angle AEO = \angle BFO = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $EOFC$ 为矩形.

$$\therefore QE = QO.$$



$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4, \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$\therefore EF$ 与 $\odot O_1$ 相切.

同理： EF 与 $\odot O_2$ 相切.

(c) 作 $MP \perp OA$ 于 P , 设 $MN = a$, 由题意可得 $MP = MN = a$.

$$\therefore MN \parallel OA,$$

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAO.$$

$$\therefore \frac{MN}{AO} = \frac{CN}{CO}.$$

$$\therefore \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{解之, 得 } a = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}.$$

此时, 四边形 $OPMN$ 是正方形.

$$\therefore MN = OP = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}.$$

$$\therefore P(-\frac{3\sqrt{3}-3}{2}, 0).$$

考虑到四边形 $PMNO$ 此时为正方形,

\therefore 点 P 在原点时仍可满足 $\triangle PMN$ 是以 MN 为一直角边的等腰直角三角形.

故 x 轴上存在点 P 使得 $\triangle PMN$ 是一个以 MN 为一直角边的等腰直角三角形且

$$P(-\frac{3\sqrt{3}-3}{2}, 0) \text{ 或 } P(0, 0).$$

NO.7 函数与分析

1、选择题：(1) C; (2) D; (3) C; (4) A; (5) C; (6) A.

2、填空题：

$$(1) x \geq -\frac{3}{2} \text{ 且 } x \neq 2; \quad (2) 2; \quad (3) \text{ 上升};$$

$$(4) -; \quad (5) \text{①②③}; \quad (6) 8;$$

$$(7) 10;$$

$$(8) \begin{cases} a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}a \geq 6 \\ a + \frac{1}{3}a > 6 \end{cases} \therefore \frac{54}{13} \leq a < \frac{9}{2}$$

$$(9) \frac{\sqrt{10}}{5}; \quad (10) 2011.5$$

1、选择题：(1) C; (2) D; (3) C; (4) A; (5) C; (6) A.

2、填充题：

$$(1) x \geq -\frac{3}{2} \text{ 且 } x \neq 2; \quad (2) 2; \quad (3) \text{上升};$$

$$(4) -; \quad (5) \text{①②③}; \quad (6) 8;$$

$$(7) 10;$$

$$(8) \begin{cases} a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}a \geq 6 \\ a + \frac{1}{3}a > 6 \end{cases} \therefore \frac{54}{13} \leq a < \frac{9}{2}$$

$$(9) \frac{\sqrt{10}}{5}; \quad (10) 2011.5$$

3、解答题：

(1) 解：(a) \because 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 A (3, 0), B (2, 3), C (0, 3).

$$\therefore \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{解得：} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = y = -(x-1)^2 + 4$$

$$\therefore \text{二次函数的顶点坐标为 } (1, 4) \text{ 对称轴为直线：} x = 1$$

$$(b) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

(c) 作 $BD \perp AC$, 垂足为 D , $\because CB \parallel x$ 轴 $\therefore \angle BCD = \angle CAO = 45^\circ$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

(2) 解 (a) \because 直线 $y = 3x + 3$ 交 x 轴于 A 点, 交 y 轴于 B 点 $\therefore A(-1, 0)$

$B(0, 3)$

设 $y = a(x+1)(x-3)$ $a \neq 0$ 把点 $(0, 3)$ 代入上式

解得 $a = -1$ \therefore 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$

(b) 抛物线对称轴为直线 $x = 1$ \therefore 设 $Q(1, a)$

$$AB = \sqrt{10} \quad AQ = \sqrt{4 + a^2} \quad BQ = \sqrt{1 + (3 - a)^2}$$

若 $\angle ABQ = 90^\circ$ 则 $AB^2 + BQ^2 = AQ^2$ 解得 $a = \frac{8}{3}$

若 $\angle BAQ = 90^\circ$ 则 $AB^2 + AQ^2 = BQ^2$ 解得 $a = -\frac{2}{3}$

若 $\angle BQA = 90^\circ$ 则 $BQ^2 + AQ^2 = AB^2$ 解得 $a = 2$ 或 $a = 1$

\therefore 综上所述 $Q_1(1, \frac{8}{3})$ $Q_2(1, -\frac{2}{3})$ $Q_3(1, 2)$ $Q_4(1, 1)$

(3) 解 (a) 把 $y = 3$ 代入直线 $y = \frac{3}{4}x$ $x = 4$

$\therefore D(4, 3)$

(b) 把点 A 、 D 代入 $y = ax^2 + bx$

$$\text{解得 } y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x$$

(c) 对称轴为直线 $x = 3$

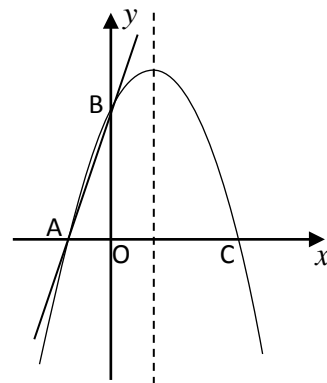
设对称轴交 x 轴于 E , 交 BC 于 F

I : \because 对称轴 $\parallel y$ 轴, $\therefore \angle MEO = \angle OCD = 90^\circ$

且 $BC \parallel AO$ $\therefore \angle CDO = \angle DOE$

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle MPO$

$\therefore P_1$ 为 $E(3, 0)$



II : 若 $\angle MOP = \angle COE = 90^\circ$

\therefore 对称轴 $\parallel y$ 轴 $\therefore \angle COM = \angle OMP$

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle MOP$

$$\therefore \frac{OC}{MO} = \frac{CD}{OP} \therefore OP = 5$$

设 $P(3, a)$ 解得 $a = -4$ (由图可知, 正解已舍)

$\therefore P_2(3, -4)$

综上所述 $P_1(3, 0)$ $P_2(3, -4)$

(4) (1) 0.5 (2分)

(2) 骑车速度: $10 \div 0.5 = 20$ 千米/小时 (2分)

驾车速度: $30 \div 0.5 = 60$ 千米/小时 (2分)

(3) 设小明和爸爸从 A 地前往 B 地时, $y = kt + b$ ($k \neq 0$)

由图可知 $t=1$ 时, $y=10$; $t=2$ 时, $y=30$

$$\text{代入得} \begin{cases} 10 = k + b \\ 30 = 2k + b \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} k = 20 \\ b = -10 \end{cases} \quad (2 \text{分})$$

得 $y = 20t - 10$

当 $t=1.5$ 时, $y=20$, $30-20=10$ (1分)

\therefore 妈妈出发时, 小明和爸爸离 B 地 10 千米。(1分)

(5) 解 (a) 由图像可知游泳池 5 个小时排水 $1890(\text{m}^3)$,

所以该游泳池排水的速度是 $1890 \div 5 = 378$ (m^3/h).

由题意得该游泳池灌水的速度是 $378 \times \frac{1}{2} = 189$ (m^3/h),

由此得灌水 $1890(\text{m}^3)$ 需要的时间是 $1890 \div 189 = 10$ (h)

所以清洗该游泳池所用的时间是 $21 - 5 - 10 = 6$ (h)

(b) 设灌水过程中的 y (m^3) 与换水时间 t (h) 之间的函数关系式是 $y = kt + b$ ($k \neq 0$).

将 $(11, 0), (21, 1890)$ 代入 $y = kt + b$, 得

$$\begin{cases} 11k + b = 0, \\ 21k + b = 1890. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} k = 189, \\ b = -2079. \end{cases}$$

所以灌水过程中的 y (m^3) 与时间 t (h) 之间的函数关系式是

$$y = 189t - 2079 \quad (11 < t \leq 21).$$

备注：学生若将定义域写成 $11 \leq t \leq 21$, 亦视为正确, 此处不是问题的本质.

(6)(a) 设 y 关于 x 的函数关系式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

$$\text{由题意, 得} \begin{cases} 30k + b = 100, \\ 50k + b = 20; \end{cases}$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = -4, \\ b = 220; \end{cases}$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为 $y = -4x + 220$.

(b) 设该商品的单价应该定 x 元.

$$\text{由题意, 得 } x(-4x + 220) = 2400$$

$$\text{化简整理, 得 } x^2 - 55x + 600 = 0. \text{ 解得, } x_1 = 40, x_2 = 15.$$

经检验, $x_2 = 15$ 不合题意, 舍去;

答：计划每天的销售额为 2400 元时, 该商品的单价应该定 40 元.

(7) 解：(a) 如图, 过点 B 作 $BD \perp OA$ 于点 D.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\because |AB| = 3\sqrt{5}, \sin \angle OAB = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore |BD| = |AB| \cdot \sin \angle OAB$$

$$= 3\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 3.$$

又由勾股定理, 得

$$\begin{aligned} |AD| &= \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore |OD| = |OA| - |AD| = 10 - 6 = 4.$$

\therefore 点 B 在第一象限, \therefore 点 B 的坐标为 (4, 3).

设经过 O(0,0)、C(4, -3)、A(10,0) 三点的抛物线的函数表达式为

$$y = ax^2 + bx (a \neq 0).$$

$$\text{由} \begin{cases} 16a + 4b = -3 \\ 100a + 10b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8}, \\ b = -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{经过 O、C、A 三点的抛物线的函数表达式为 } y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

(b) 假设在 (1) 中的抛物线上存在点 P, 使以 P、O、C、A 为顶点的四边形为梯形

① \because 点 C(4, -3) 不是抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x$ 的顶点,

\therefore 过点 C 做直线 OA 的平行线与抛物线交于点 P₁.

则直线 CP₁ 的函数表达式为 $y = -3$.

对于 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x$, 令 $y = -3 \Rightarrow x = 4$ 或 $x = 6$.

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = -3. \end{cases}$$

而点 C(4, -3), $\therefore P_1(6, -3)$.

在四边形 P_1AOC 中, $CP_1 \parallel OA$, 显然 $|CP_1| \neq |OA|$.

\therefore 点 $P_1(6, -3)$ 是符合要求的点.

②若 $AP_2 \parallel CO$, 设直线 CO 的函数表达式为 $y = k_1x$.

将点 $C(4, -3)$ 代入, 得 $4k_1 = -3. \therefore k_1 = -\frac{3}{4}$.

\therefore 直线 CO 的函数表达式为 $y = -\frac{3}{4}x$.

于是可设直线 AP_2 的函数表达式为 $y = -\frac{3}{4}x + b_1$.

将点 $A(10, 0)$ 代入, 得 $-\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$.

\therefore 直线 AP_2 的函数表达式为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$.

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \\ y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0, \text{ 即 } (x-10)(x+6) = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 12; \end{cases}$$

而点 $A(10, 0)$, $\therefore P_2(-6, 12)$.

过点 P_2 作 $P_2E \perp x$ 轴于点 E , 则 $|P_2E| = 12$.

在 $Rt\triangle AP_2E$ 中, 由勾股定理, 得

$$|AP_2| = \sqrt{|P_2E|^2 + |AE|^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$$

而 $|CO| = |OB| = 5$.

\therefore 在四边形 P_2OCA 中, $AP_2 \parallel CO$, 但 $|AP_2| \neq |CO|$.

\therefore 点 $P_2(-6, 12)$ 是符合要求的点.

③若 $OP_3 \parallel CA$, 设直线 CA 的函数表达式为 $y = k_2x + b_2$

将点 $A(10, 0)$ 、 $C(4, -3)$ 代入, 得

$$\begin{cases} 10k_2 + b_2 = 0 \\ 4k_2 + b_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2}, \\ b_2 = -5. \end{cases}$$

∴直线 CA 的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x - 5$.

∴直线 OP_3 的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 14x = 0, \text{ 即 } x(x-14)=0.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 14, \\ y_2 = 7. \end{cases}$$

而点 $O(0,0)$, ∴ $P_3(14, 7)$.

过点 P_3 作 $P_3E \perp x$ 轴于点 E , 则 $|P_3E| = 7$.

在 $Rt\triangle OP_3E$ 中, 由勾股定理, 得

$$|OP_3| = \sqrt{|P_3E|^2 + |OE|^2} = \sqrt{7^2 + 14^2} = 7\sqrt{5}.$$

而 $|CA| = |AB| = 3\sqrt{5}$.

∴在四边形 P_3OCA 中, $OP_3 \parallel CA$, 但 $|OP_3| \neq |CA|$.

∴点 $P_3(14, 7)$ 是符合要求的点.

综上所述, 在 (1) 中的抛物线上存在点 $P_1(6, -3)$ 、 $P_2(-6, 12)$ 、 $P_3(14, 7)$,

使以 P 、 O 、 C 、 A 为顶点的四边形为梯形.

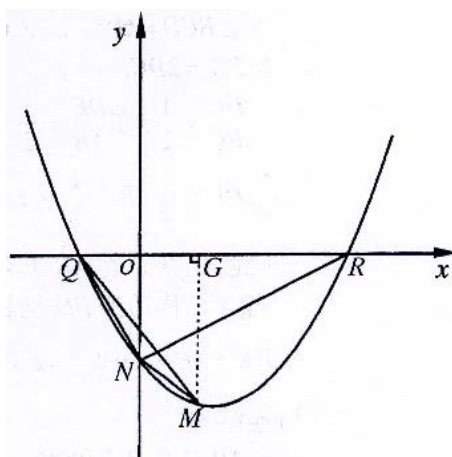
(c) 由题知, 抛物线的开口可能向上, 也可能向下.

①当抛物线开口向上时, 则此抛物线与 y 轴的负半轴交于点 N .

可设抛物线的函数表达式为 $y = a(x + 2k)(x - 5k)$

($a > 0$).

$$\text{即 } y = ax^2 - 3akx - 10ak^2$$



$$= a(x - \frac{3}{2}k)^2 - \frac{49}{4}ak^2.$$

如图, 过点 M 作 $MG \perp x$ 轴于点 G.

$$\therefore Q(-2k, 0), R(5k, 0), G(\frac{3}{2}k, 0), N(0, -10ak^2), M(\frac{3}{2}k, -\frac{49}{4}ak^2),$$

$$\therefore |QO| = 2k, |QR| = 7k, |OG| = \frac{3}{2}k, |QG| = \frac{7}{2}k, |ON| = 10ak^2, |MG| = \frac{49}{4}ak^2.$$

$$\therefore S_{\square QNR} = \frac{1}{2}|QR||ON| = \frac{1}{2} \times 7k \times 10ak^2 = 35ak^3.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}|QO||ON| + \frac{1}{2}(|ON| + |GM|)|OG| - \frac{1}{2}|QG||GM| \\ &= \frac{1}{2} \times 2k \times 10ak^2 + \frac{1}{2} \times (10ak^2 + \frac{49}{4}ak^2) \times \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \times \frac{7}{2}k \times \frac{49}{4}ak^2 \\ &= \frac{1}{2}(29 + 15 + 3 \times \frac{49}{8} - 7 \times \frac{49}{8})ak^3. \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\square QNM} : S_{\square QNR} = (\frac{21}{4}ak^3) : (35ak^3) = 3 : 20.$$

②当抛物线开口向下时, 则此抛物线与 y 轴的正半轴交于点 N,

同理, 可得 $S_{\square QNM} : S_{\square QNR} = 3 : 20$.

综上所述, $S_{\square QNM} : S_{\square QNR}$ 的值为 3 : 20.

NO.8 数据整理和概率统计

1、选择题:

(1) B; (2) C; (3) D; (4) B; (5) D; (6) . B.

2、填空题:

- | | | |
|----------------------|-------------------------|---------------------|
| (1) 8 ; | (2) $\frac{1}{3}$; | (3) $\frac{1}{2}$; |
| (4) $2a$; | (5) 4; | (6) 2700; |
| (7) $\frac{3}{5}$; | (8) $P_3 > P_1 > P_2$; | (9) 必然; |
| (10) $\frac{3}{4}$. | | |

3、解答题:

(1) 解: ① 80 ;

② 成绩位于 79.5~89.5 的频率为

$$1 - (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.15) = 0.25.$$

所以全校所有参赛学生中成绩等第为优良的学生人数为

$$600 \times (0.25 + 0.15) = 240 \text{ (人)}$$

③ 本次随机抽样分析成绩不合格的人数为 $80 \times 0.1 = 8$ (人),
成绩优良的人数为 $80 \times 0.4 = 32$ (人)

依据题意, 可得方程组

$$\begin{cases} \frac{57 \times 8 + 40a + 32b}{80} = 76.5, \\ -a + b = 15. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = 72, \\ b = 87. \end{cases}$$

④D.

(2) 答: ①2.68; ②6; ③设12月份全市共成交商品房 x 套, $\frac{200}{2400} = \frac{x}{60000}$, $x = 5000$,

$$5000 \times (6\% + 17\%) = 1150 \text{ (套)}$$

(3) 答: ①200; ② 162° ; ③图略; ④ $\frac{23}{50}$; ⑤29700.

(4) ①将下表填完整:

②178; 178.

$$\begin{aligned} \text{③} \quad \because S_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{10}(0+1+1+0+1+0+1+1+0+1) = \frac{3}{5} \\ S_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{10}(0+1+4+0+4+0+4+0+1+4) = \frac{9}{5} \\ \therefore S_{\text{甲}}^2 &< S_{\text{乙}}^2, \therefore \text{甲仪仗队更为整齐.} \end{aligned}$$

(5) 答: ① $a=18, b=12, c=0.36$; 图略; ②第3组; ③126人; ④ $\frac{1}{3}$

(6) ① $\frac{1}{3}$; ② ⑤号或⑥号; ③ $\frac{1}{15}$.

(7) 解: ①记演讲答辩分为 \bar{X} , 民主测评的分为 \bar{Y} , 综合得分为,

$$\bar{X}_{\text{甲}} = 92, \bar{Y}_{\text{甲}} = 87.$$

$$\bar{X}_{\text{乙}} = 89, \bar{Y}_{\text{乙}} = 88.$$

身高 (cm)	176	177	178	179	180
甲队 (人数)	0	3	4	3	0
乙队 (人数)	2	1	4	1	2

$$\begin{aligned} \text{当 } a=0.6 \text{ 时, } \bar{Z}_{\text{甲}} &= 92 \times 0.4 + 87 \times 0.6 = 89. \\ \bar{Z}_{\text{乙}} &= 89 \times 0.4 + 88 \times 0.6 = 88.4 \end{aligned}$$

答：当 $a=0.6$ 时，甲的综合得分较高。

② 当 $0.5 \leq a \leq 0.8$ 时，

$$\bar{Z}_{\text{甲}} = 92(1-a) + 87a.$$

$$\bar{Z}_{\text{乙}} = 89(1-a) + 88a.$$

$$\text{当 } \bar{Z}_{\text{甲}} > \bar{Z}_{\text{乙}} \text{ 时, } 0.5 \leq a < 0.75;$$

$$\text{当 } \bar{Z}_{\text{甲}} = \bar{Z}_{\text{乙}} \text{ 时, } a = 0.75$$

$$\text{当 } \bar{Z}_{\text{甲}} < \bar{Z}_{\text{乙}} \text{ 时, } 0.75 < a \leq 0.8$$

答：当 $0.5 \leq a < 0.75$ 时，甲的综合的分较高；当 $0.75 < a \leq 0.8$ 时乙的综合的分较高；当 $a = 0.75$ 时，两人的综合的分一样。